PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

André NATAF

SUR DES QUESTIONS D'AGRÉGATION EN ÉCONOMÉTRIE

VOL. II - FASCICULE 4 - 1953

PARIS
11, Rue Pierre Curie

Toute la correspondance relative aux publications
doit être envoyée à l'adresse :

INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITE DE PARIS

11, Rue Pierre Curie - PARIS (V[e])

Les manuscrits doivent être envoyés à *M. Daniel DUGUÉ*,
à l'adresse précédente.

Abonnements : Pour la France 1.200 francs français
Pour l'Etranger 1.500 francs

Vente au numéro : *(fascicule de 50 pages environ)*
Pour la France 350 francs français
Pour l'Etranger 400 francs

Les abonnements sont payables :

soit, par chèque bancaire au nom de *l'Institut de Statistique*,

soit, par virement postal au compte de chèques postaux de
M. Henri BUNLE, 68, Boulevard Saint-Marcel, Paris-5[e]
C. C. P. 5818-84 Paris.



PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS, LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

VOL. II - FASCICULE 4 - 1953

PARIS

11, Rue Pierre Curie

SUR DES QUESTIONS D'AGRÉGATION
EN ÉCONOMÉTRIE

INTRODUCTION

Les sciences économiques étudient les relations qu'entretiennent les hommes vivant en société pour produire et se répartir les biens matériels qui leur permettent de vivre et de se développer. Mais les méthodes scientifiques qui ont assuré le développement des sciences de la nature ne peuvent être transposées dans le domaine économique.

Dans les sciences de la nature des résultats très importants ont pu être obtenus dès le début de leur constitution par l'emploi de la méthode expérimentale. Ces succès tiennent au fait qu'un nombre considérable de phénomènes naturels peuvent être isolés de leur environnement sans que cela perturbe notablement leur nature. On peut, au moyen d'expériences à petite échelle, étudier ces phénomènes en eux-mêmes en quelque sorte, on peut en isoler le petit nombre de causes agissantes et étudier qualitativement et quantitativement les relations entre ces causes et le phénomène qu'elles gouvernent.

Il n'est plus aussi facile d'opérer avec autant de succès lorsqu'on descend à un niveau assez fin dans l'étude des phénomènes. A l'échelle de l'atome les conditions de l'expérience réagissent déjà notablement sur le phénomène. Les lois microscopiques sont plus difficiles à connaître que les lois macroscopiques. Et, de plus, les lois de ces phénomènes microscopiques ne sont pas en général utilisables pratiquement telles quelles une fois découvertes. Il est indispensable de combiner de très nombreux phénomènes élémentaires dans une théorie statistique pour en tirer des conséquences intéressantes. Et ce n'est qu'à ce moment, bien souvent, que l'on peut songer à monter des expériences qui infirmeront, confirmeront ou préciseront les résultats prévus par la théorie, ou bien répondront à une question que soulève la théorie. Ce qui est à souligner, pour notre objet, c'est que les plans de ces expériences ne sont pas concevables sans la composition de certaines lois ou hypothèses élémentaires.

Les difficultés devant lesquelles s'est trouvée dès le début l'économie présentent des caractères analogues. L'interdépendance des phénomènes économiques est un fait qui s'est vérifié très rapidement avec le développement des échanges à l'intérieur d'une même société et entre des sociétés géographiquement et politiquement distinctes. Cette interdépendance joue sur un très grand nombre d'individus et sur un très grand nombre de

produits matériels résultant de l'activité de ces individus dans des conditions de structure économique et sociale donnée. On ne peut songer en conséquence à isoler une partie de la société pour en étudier le comportement. Non seulement en effet ceci est-il pratiquement impossible, mais encore même en admettant une telle possibilité, les résultats macroscopiques observés ne se maintiendraient pas, une fois cette partie de la société replongée dans le tout. On ne peut non plus se contenter d'utiliser les résultats macroscopiques enregistrés historiquement car les phénomènes économiques évoluent très fortement dans le temps et ne sont pas indépendants du passé. En revanche l'observation et l'esprit de déduction permettent d'étudier des comportements économiques élémentaires, ou à tout le moins d'avancer des hypothèses raisonnables sur ces comportements. C'est ainsi qu'on a étudié le comportement de l'entrepreneur, du consommateur, que l'on a étudié des types possibles d'économie concurrentielle ou monopolistique ou oligopolistique, etc...

Mais cette connaissance des comportements économiques élémentaires n'est qu'un premier pas et qu'un outil dans l'étude de l'économie. Il faut combiner de façon cohérente toutes ces lois élémentaires innombrables pour être en mesure de dire comment l'économie évolue sous l'action de ces comportements. Il faut d'ailleurs expliquer cette évolution ex-post, puis ex-ante. Est-il possible d'ailleurs de donner une réponse d'une parfaite précision à cette question ? Peut-on prévoir, jour par jour, la production de tous les biens et leur consommation par chacun des membres de la société. Il est bien clair que non seulement les difficultés de calcul interdisent de répondre affirmativement à cette question, mais qu'encore par nature même les phénomènes étudiés ne se laissent pas tracer par avance leur histoire de façon aussi mécanique. Que ce soit dans une économie de laissez-faire ou dans une économie dirigée, en régime capitaliste ou en régime collectiviste, on ne peut songer à de telles prévisions. Cependant une description économique rendant compte des grandes lignes de l'économie, ou une étude permettant approximativement de prévoir ces grandes lignes sont d'un très grand intérêt : la description tire son intérêt du fait qu'elle permet de vérifier l'exactitude des théories avancées tandis que la prévision permet d'agir sur l'économie dans un sens jugé heureux. La prévision permettra par exemple de fixer avec précision les objectifs de production, de consommation et de constitution des réserves des produits les plus importants en fonction des possibilités reconnues de la société considérée. On peut admettre que une fois fixés ces objectifs principaux, d'intérêt primordial, il sera loisible de laisser les productions secondaires s'ajuster librement au mieux des disponibilités restantes par le simple jeu des comportements élémentaires ou bien par des décisions ayant peut-être un caractère d'incertitude, en ce sens qu'on ne sait s'il n'y en aurait pas de meilleures, sans que cette incertitude soit tout de même bien grave. Si donc il apparaît impossible de calculer toutes les caractéristiques d'un système économique détaillé, il semble qu'il y ait grand intérêt à calculer de grands postes de l'économie.

Mais il se pose une question préalable. Est-il sûr que de tels programmes soient possibles, et comment déterminer ces groupements de produits principaux, ces décisions d'ordre secondaire ? Voyons quels procédés utilisent les théories économiques. Les théories étudient et décrivent les comportements élémentaires des individus, les processus de production et de distribution. Puis, à partir d'une situation de base donnée, caractérisée par l'équipement industriel et agricole, l'état démographique, le point des ressources en matières premières et énergie, la théorie, coordonnant tous ces aspects partiels, essaye d'expliquer ex-post une évolution passée ou de prévoir ex-ante une évolution dans l'avenir.

Pour ce faire, (que la théorie s'exprime ou non sous forme mathématique) la théorie ne déduit pas de la résolution du système de toutes les relations écrites l'évolution de l'économie car ce système est inextricable. La théorie procède en général suivant l'une ou l'autre de ces voies :

ou bien elle recherche si certaines combinaisons des relations écrites ne donnent pas de résultats intéressants permettant d'axer sur eux une politique économique,

ou bien elle construit un modèle simplifié de la théorie en constituant des groupements d'individus (consommateurs ou producteurs à tous les échelons) et d'entreprises et de biens entre lesquels on établit des relations de formes analogues à celles que l'observation et la déduction ont reconnues entre les unités constitutives de chacun de ces groupements. Ce modèle est assez simple pour permettre une résolution explicite.

Dans le premier cas on risque fort de n'aboutir qu'à des résultats fragmentaires et mal reliés entre eux.

Dans le deuxième cas l'opération de groupement d'unités élémentaires s'appelle une agrégation, les groupements constituent des agrégats et les concepts macroscopiques, ainsi introduits, et les lois qui les lient constituent des phénomènes macroéconomiques. Leur introduction, comme nous l'avons indiqué, correspond à des besoins pratiques qui, à l'heure actuelle et en tous lieux sont de la plus haute importance. Mais la procédure d'analogie employée pour définir le modèle n'est en général pas autrement justifiée et l'on ne sait si elle est valide.

OBJET ET PLAN DE L'ÉTUDE

Dans ce travail nous nous proposons de rechercher à quelles conditions et par quels moyens, à partir d'une théorie complète donnée on peut tirer de façon rigoureuse un modèle macroscopique simplifié, cette simplification pouvant d'ailleurs se limiter à une partie seulement de la théorie.

Dans le premier chapitre nous partirons de théories très générales, peu spécifiées, et nous chercherons à voir s'il est possible de réaliser des agrégations ayant un sens économique. Nous montrerons ainsi :

1° que dans les cas où chaque technique de production peut se représenter par une seule fonction de production pourvue de dérivées du 1er ordre, ces fonctions doivent avoir des formes très particulières pour qu'il y ait possibilité d'agrégation : les fonctions de production doivent pouvoir se ramener à des sommes de termes dont chacun n'intéresse que des catégories économiques disjointes et qui sont les mêmes pour toutes les fonctions.

2° que, dans le cadre de la théorie des choix, l'agrégation n'est possible, quels que soient les revenus des consommateurs, que si les surfaces d'indifférence relatives à ces consommateurs se déduisent d'une façon uniforme (d'ailleurs linéaire) à partir de surfaces de base (qui, elles, n'ont aucune relation entre elles a priori) assignées à chaque consommateur.

Nous avons essayé, dans cette partie, de voir s'il n'était pas possible d'apporter des simplifications à une théorie quelconque sans faire intervenir au fond la nature même de cette théorie. Une réponse affirmative à cette question aurait été évidemment la bienvenue. On ne peut justement la donner. Cet essai aura eu au moins l'avantage de montrer qu'il est dangereux de postuler une telle possibilité de simplification. Il constitue une mise en garde contre une acceptation irréfléchie de modèles simplifiés et

des conséquences qu'on en peut déduire. Mais de plus cet essai aura eu le mérite de montrer que le problème de l'agrégation ne se pose pas, par essence en dehors de la théorie économique considérée, en dehors de la forme analytique des fonctions qui s'introduisent.

Aussi dans un deuxième chapitre nous reprenons la question de l'agrégation en restreignant les classes de fonctions considérées. Après avoir montré, à la suite notamment de Shou Shan Pu et Kenneth May comment on peut poser le problème général dans ce cas, nous étudions :

1° Les possibilités d'agrégation pour la consommation dans le cas où tous les revenus sont égaux, hypothèse importante car elle schématise le cas d'individus appartenant à un même groupe socio-économique, cas où il semble justifié de tenter une agrégation. Sans résoudre le problème nous le ramenons à un système d'équations aux dérivées partielles dont nous donnons une propriété générale et certaines solutions lorsqu'on impose la condition naturelle que l'agrégation caractérise le groupe considéré comme groupe social, indépendamment du nombre d'individus qui peuvent le composer.

2° Nous étudions aussi la forme que prennent les relations entre certains agrégats de produits et de facteurs de production, lorsque les fonctions de production élémentaires sont linéaires (en ce sens que pour un procédé technique de fabrication chacun des produits et facteurs est fonction linéaire et homogène d'un seul paramètre. Nous indiquons comment on peut rechercher expérimentalement ces relations et montrons l'intérêt que leur connaissance présente pour l'étude des comportements économiques. Enfin, nous montrons de quel secours peuvent être ces résultats dans l'étude d'une économie complète.

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE DES POSSIBILITÉS D'AGRÉGATION INDÉPENDAMMENT DE LA STRUCTURE DE LA THÉORIE ÉCONOMIQUE

I. 1 — UN PROBLÈME D'AGRÉGATION DANS LA PRODUCTION DÛ À L. R. KLEIN

On peut penser qu'on éclaircit la complexité d'une évolution économique en commençant d'abord par connaître l'évolution de certains agrégats. Cependant si, pour calculer ces agrégats il faut d'abord en calculer toutes les composantes, il ne semble pas y avoir vraiment de simplification. Il y aura simplification si on peut faire une théorie intrinsèque des liaisons existant entre ces agrégats, cette théorie permettant leur calcul à partir de la seule connaissance de certains d'entre eux.

C'est en partant de cette idée que Laurence R. Klein [1], après avoir souligné la nécessité de fonder en toute rigueur le passage d'une théorie microéconomique complète à une théorie macroéconomique, a été conduit à rechercher à quelles conditions on pouvait bâtir rigoureusement un modèle macroéconomique sur le type même de la théorie microéconomique.

Plus précisément Klein considère A entreprises chacune désignée par un indice α, $\alpha = 1, 2, \dots A$ et produisant des biens $x_{i\alpha}$ de nature $x_1, x_2 \dots x_m$ grâce à l'utilisation des services $N_{j\alpha}$ de r qualités de main d'œuvre et $z_{k\alpha}$ de s qualités de capitaux. Klein suppose qu'il existe une seule fonction technique de production par firme x. Il note cette fonction sous la forme

$$(1) \qquad F_\alpha (x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha}; n_{1\alpha} \dots n_{r\alpha}; z_{1\alpha}, \dots z_{s\alpha}) = 0$$
$$\alpha = 1, 2 \dots A$$

Il suppose que la fonction F est assez régulière pour qu'on puisse en déduire les dérivées partielles des x_i par rapport aux $n_{j\alpha}$ et aux $z_{k\alpha}$ [2].

(1) "Macroeconomics and the theory of rational behavior" par Lawrence R. Klein dans : Econometrica. Vol. 14, N° 2, Avril 1946.

(2) Cette hypothèse est d'ailleurs très naturelle chez lui car il se place dans le cadre des théories marginalistes de l'équilibre.

Beaucoup d'auteurs essayent de déterminer l'allure du marché en se bornant à calculer certaines fonctions du type suivant :

X fonction des $x_{i\alpha}$ seuls	$i = 1, 2, \dots m$ $\alpha = 1, 2, \dots A$
N fonction des $n_{j\alpha}$ seuls	$j = 1, 2, \dots r$ $\alpha = 1, 2, \dots A$
Z fonction des $z_{k\alpha}$ seuls	$k = 1, 2, \dots s$ $\alpha = 1, 2, \dots A$

X, N, Z représentent, dans cet esprit, des indices respectivement de la production, du travail, et des capitaux. On peut, comme cela a été fait la plupart du temps dans l'utilisation des indices économiques, essayer d'étendre aux X, N, Z des relations du type de celles qui existent entre les x, n, z. Cette extension se présente sous un jour relativement simple si, entre les indices X, N, Z existe une relation

$$F(X, N, Z) = 0 \tag{2}$$

tenant identiquement du fait de la définition des 3 indices, lorsque les équations (1) sont vérifiées, et à partir de laquelle on puisse calculer les dérivées de X par rapport à N et Z respectivement (1).

Pour étudier cette possibilité en toute rigueur Klein pose le problème suivant. Désignant par

$$X = G(x_{11}, \dots x_{m1}; \dots; \dots; x_{1A}, \dots, x_{mA}) \tag{3}$$
$$N = H(n_{11}, \dots n_{r1}; \dots; \dots; n_{1A}, \dots, n_{rA}) \tag{4}$$
$$Z = I(z_{11}, \dots z_{s1}; \dots; \dots; z_{1A}, \dots, z_{sA}) \tag{5}$$

les fonctions X, N, Z, il recherche les conditions nécessaires et suffisantes (K) que doivent remplir les A fonctions F et les 3 fonctions G, H, I, pour que ces dernières puissent être liées par une relation

$$\Phi(X, N, Z) = 0 \tag{6}$$

Klein met en évidence un système de variables indépendantes qui sont : toutes les variables $x_{i\alpha}$, sauf les variables $x_{1\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \dots A)$ $(i = 2, 3, \dots m)$ et toutes les variables $n_{j\alpha}$ et $z_{k\alpha}$ sans exception. Avec les hypothèses faites chaque équation (2) permet le calcul d'un x au moins (sans quoi la production ne figurerait pas dans ces fonctions techniques, ce qui n'aurait pas de sens). Par un changement de notation au besoin on peut supposer (2) que cet x_α est $x_{1\alpha}$ et on posera

$$x_{1\alpha} = f\,(x_{2\alpha}, \dots, x_{m\alpha}; n_{1\alpha}, n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha}; z_{1\alpha}, z_{2\alpha} \dots z_{s\alpha}) \tag{7}$$

Pour obtenir les conditions (K) il suffit de remplacer dans (3) les $x_{1\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \dots A)$ par leur expression en fonction de (7), de porter dans (6) et d'écrire que les dérivées de Φ par rapport aux seules variables indé-

---

(1) Klein pensait que l'existence de la relation F = 0 était une condition nécessaire. En réalité, comme l'a relevé Shou Shan Pu, cette condition n'est que suffisante.

(2) Si le produit x ne figurait pas dans la production de chaque entreprise, cela se traduirait dans l'interprétation économique du résultat, mais nullement dans l'établissement de ce résultat où la nature matérielle des xi n'intervient pas du tout.

pendantes sont identiquement nulles. On obtient ainsi très aisément les conditions suivantes en supposant (ce qui semble évident d'après la nature économique de la question) que les dérivées $\frac{\partial H}{\partial n_{i\alpha}}$ et $\frac{\partial I}{\partial z_{j\alpha}}$ ne sont pas toutes nulles.

$$(8) \qquad \frac{\partial x_{1\alpha}}{\partial x_{i\alpha}} \equiv - \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}} \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots m \\ \alpha = 1, 2, \dots A \end{array}$$

$$(9) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{j\alpha}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial H}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial n_{j\beta}}} \; \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\beta}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots r \\ j = 1, 2, \dots r \\ \alpha = 1, 2, \dots A \\ \beta = 1, 2, \dots A \end{array}$$

$$(10) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial z_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial x_{1\beta}}{\partial z_{j\beta}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial I}{\partial z_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial I}{\partial z_{j\beta}}} \; \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\beta}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots s \\ j = 1, 2, \dots s \\ \alpha = 1, 2, \dots A \\ \beta = 1, 2, \dots A \end{array}$$

Klein a appliqué ces conditions (K) à l'étude de cas particuliers. Il a pressenti que, dans le cas général, il doit exister quelques similitudes de forme entre les fonctions G, H, I et les fonctions F (α). Nous avons pu résoudre complètement la question (1), confirmant d'ailleurs les prévisions de Klein.

Nous désignerons plus brièvement par système (K) le système formé par l'ensemble des équations (8), (9) et (10).

I. 1.1 - INTÉGRATION DU SYSTÈME (K)

1° Faisons d'abord quelques remarques générales mais qui nous seront utiles dans l'étude de (K).

R 1° - Les couples de variables et fonctions n et H d'une part, z et I d'autre part, jouent des rôles manifestement symétriques dans tout le problème. A tout résultat établi à n'importe quel moment de l'étude pour l'un des couples correspondra un résultat symétrique pour l'autre.

R 2° - Au lieu de calculer les $x_{i\alpha}$ dans les équations (1) F (α) = 0 nous aurions pu, sans rien changer à la forme que doivent prendre les fonctions G, H, I, calculer les $n_{j\alpha}$ ou les $z_{k\alpha}$. Dans ces conditions nous pouvons compléter notre première remarque générale en disant que tout résultat établi pour l'un des couples n, H et z, I pourra se transcrire à la fin des calculs sur les couples x, G; n, H; z, I par une permutation convenable.

2° Intégration des équations (9) (et par suite (10)). Les équations (9) doivent être vérifiées lorsqu'on y fait $\alpha = \beta$, i et j prenant par ailleurs toutes les valeurs possibles. Ces équations deviennent alors

(1) Cf "Sur la possibilité de construction de certains macromodèles" par André Nataf – in Econometrica, Vol. 16, N° 3, Juillet 1948.

$$\overline{(9\alpha)} \quad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{j\alpha}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial H}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial n_{j\alpha}}} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots r \\ j = 1, 2, \dots r \end{array}$$

qui peuvent s'écrire plus symétriquement

$$\frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{1\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial n_{1\alpha}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{2\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial n_{2\alpha}}} \equiv \dots \equiv \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{r\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial n_{r\alpha}}}$$

ce qui montre qu'il y a (r-1) équations $(\overline{9\alpha})$ indépendantes, celles que l'on obtient en fixant j = 1 et en faisant varier i de 2, 3 à r. Ceci donne les équations

$$(9\alpha) \quad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{1\alpha}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial H}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial n_{1\alpha}}} \equiv u_{i\alpha} \qquad i = 2, 3, \dots r$$

$U_{i\alpha}$ désignant la valeur commune des rapports exprimés par rapport à x_1 ou $H \cdot U_{i\alpha}$ étant égal à $\frac{\partial H}{\partial n_{i\alpha}} / \frac{\partial H}{\partial n_{1\alpha}}$ et H n'étant fonction que des variables indépendantes n, $u_{i\alpha}$ n'est a priori fonction que des variables $n_{j\alpha}$, $j = 1, 2, \dots r$, α étant cependant susceptible de prendre toute valeur de 1 à A. Mais (9α) indique aussi que $u_{i\alpha}$ est égal à $\frac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{i\alpha}} / \frac{\partial x_{1\alpha}}{\partial n_{1\alpha}}$. Or les seules variables indépendantes n figurant dans $x_{1\alpha}$ sont les $n_{j\alpha}$, $j = 1, 2, \dots r$ mais α étant maintenant fixe. En définitive $u_{i\alpha}$ n'est fonction que des variables indépendantes $n_{1\alpha}, n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha}$.

Les équations (9α) montrent que $x_{1\alpha}$ et H sont des fonctions de $n_{1\alpha}$, $n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha}$ et d'autres variables (que nous n'avons pas besoin d'expliciter pour l'instant, mais que nous appellerons génériquement v_k, ces variables n'étant d'ailleurs pas les mêmes pour $x_{1\alpha}$ et H) et que ces fonctions sont solution d'un système [P] d'équations aux dérivées partielles (où nous désignerons par P l'inconnue)

$$[P] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial n_{2\alpha}} \equiv u_{2\alpha} \dfrac{\partial P}{\partial n_{1\alpha}} \\ \dfrac{\partial P}{\partial n_{3\alpha}} \equiv u_{3\alpha} \dfrac{\partial P}{\partial n_{1\alpha}} \\ \dfrac{\partial P}{\partial n_{r\alpha}} \equiv u_{r\alpha} \dfrac{\partial P}{\partial n_{1\alpha}} \end{cases}$$

Pour intégrer [P] supposons que nous ayons trouvé une solution $\mathcal{P}$ fonction des seules variables $n_{1\alpha}\, n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha}$. P, fonction des $n_{1\alpha}$ et des v_k vérifiera alors le système de relations.

$$[P'] \quad \frac{\dfrac{\partial P}{\partial n_{1\alpha}}}{\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial n_{1\alpha}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial P}{\partial n_{2\alpha}}}{\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial n_{2\alpha}}} \equiv \dots\dots\dots \equiv \frac{\dfrac{\partial P}{\partial n_{r\alpha}}}{\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial n_{r\alpha}}}$$

équivalent à [P].

Pour chaque système de valeurs des v_k ces équations expriment que P est fonction de la seule combinaison $\mathcal{P}(n_{1\alpha}, n_{2\alpha}, \dots n_{r\alpha})$, cette fonction dépendant évidemment arbitrairement des v_k considérés comme des paramètres. En définitive on voit que P est une fonction de $\mathcal{P}(n_{1\alpha}, n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha})$; et de $v_1 \dots v_k \dots$)

$$P = P\left[\mathcal{P}(n_{1\alpha}, n_{2\alpha}, \dots n_{r\alpha}), v_{1\alpha} \dots v_k \dots\right]$$

Remarque. Nous n'avons pas à vrai dire intégré [P]. Mais le résultat obtenu suffira pour ce qui suit. Notons en passant que les quantités

$$u_{i\alpha} \equiv \frac{\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial n_{1\alpha}}}$$

ne doivent pas être quelconques pour que le système admette des solutions différentes de la solution banale P = P (des seules variables v_k), constante par rapport aux $n_{i\alpha}$. En fait les $u_{i\alpha}$ sont surtout des intermédiaires de calcul.

Forme des fonctions H, I, f_α, G

Appliquons ces résultats à H. En donnant à α toutes les valeurs de I à A on voit que H lorsqu'on bloque les variables de tous les indices α sauf un d'entre eux se présente comme une fonction d'une fonction $H_\alpha(n_{1\alpha}, n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha})$. Si donc l'on considère deux systèmes de valeurs des $n_{j\alpha}$ que nous désignerons par $n_{j\alpha}$ et $n_{j'\alpha}$ j et j' allant de 1 à r
α et α' allant de 1 à A

et qui donnent aux H_α et H_α' correspondants les mêmes valeurs, comme on peut passer des $n_{j\alpha}$ aux $n_{j'\alpha}$ par une suite de substitutions n'intéressant chaque fois qu'un indice α, donc ne changeant pas à chaque passage la valeur de H, H en définitive n'est fonction que de $H_1, H_2 \dots H_1$.

Donc $$N = H(H_1, H_2, \quad H_A) \tag{11}$$

D'après R 1° on a de même

$$Z = I(I_1, I_2 \dots \dots I_A) \tag{12}$$

avec $I_\alpha = I_\alpha(z_{1\alpha}, z_{2\alpha} \dots z_{8\alpha})$

Les mêmes raisonnements sont encore valables pour la façon dont les n et les z interviennent dans les x .

Donc $$x_{1\alpha} = f_\alpha(x_{2\alpha} \dots, xm_\alpha), H_\alpha, I_\alpha) \tag{$\overline{13}$}$$

les fonctions H_α et I_α intervenant dans N, Z et $x_{1\alpha}$ ayant exactement la même signification, d'après l'étude du système [P]. Si l'on remonte aux fonctions F (α), ($\overline{13}$) peut se mettre sous une forme plus symétrique

(13) $$F_\alpha(x_{1\alpha}, x_{2\alpha} \dots x_{m\alpha}; H_\alpha, I_\alpha) = 0$$

Une première forme déjà assez réduite de N, Z et F_α est donc

(11) $$N = H(H_1, H_2, \dots, H_A)$$

(12) $$Z = I(I_1, I_2, ..., I_A)$$

(13) $$F_\alpha(x_{1\alpha}, x_{2\alpha}...... x_{m\alpha}; H, I) = 0$$

D'après R 2° on peut arriver aussi bien à passer de cette forme à la forme suivante

(14) $$X = G(G_1, G_2 ..... G_A) \text{ avec } G_\alpha = G_\alpha(x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, ... x_{m\alpha})$$

(15) $$Z = I(I_1, I_2 ..... I_A)$$

(16) $$F_\alpha(G_\alpha; n_{1\alpha}, n_{2\alpha}.... n_{r\alpha}; I_\alpha) = 0$$

Donnons-nous maintenant un système D de valeurs des x, n et z vérifiant par exemple (11), (12) et (13). Ce système vérifie donc aussi (14), (15) et (16), particulièrement (14) et (16). Donnons-nous alors un autre système D' de valeurs donnant aux I_α et G_α les mêmes valeurs que D et ne changeant pas les n. Dans ces conditions (11), (12) ou (15), et (14) donnent les mêmes valeurs à N, Z et X cependant que (16) d'après la façon dont interviennent les arguments est encore vérifié. Mais alors en raison de l'équivalence entre (11), (12) et (13) d'une part et (14), (15) et (16) de l'autre, le 1er système est satisfait et (13) en particulier est vérifié. Or, dans (13) les seules variations effectuées ont porté sur les $x_{i\alpha}$, ces variations laissant cependant $G_\alpha(x_{1\alpha}, x_{2\alpha} ..... x_{m\alpha})$ invariant. (13) continue donc à être vérifié sous la seule réserve de l'invariance des G_α. Donc (13) associe à un système de valeurs de H_α et I_α la même valeur de G_α. Par suite (13) peut se mettre sous la forme

(17) $$G_\alpha(x_{1\alpha}, x_{2\alpha} ..... x_{m\alpha}) = \chi_\alpha(H_\alpha, I_\alpha)$$

ou plus symétriquement sous la forme

(18) $$F_\alpha(G_\alpha, H_\alpha, I_\alpha) = 0$$

Une deuxième forme réduite de X, N, Z, F_α est donc

(19) $$\begin{aligned} X &= G(G_1, G_2 .... G_A) \\ N &= H(H_1, H_2 .... H_A) \\ Z &= I(I_1, I_2 .... I_A) \\ F_\alpha&(G_\alpha, H_\alpha, I_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Arrivés à ce stade nous pouvons déjà remarquer du seul point de vue mathématique que nous aurions pu, au lieu de considérer 3 groupes de variables x, n, z, en considérer un nombre quelconque sans changer la forme des équations (1) à (10) mais en ajoutant simplement quelques nouveaux indices économiques et quelques équations exactement de la même forme que (9) et (10), (8) restant tel quel. Les nouvelles équations telles que (9) et (10) se résoudraient de la même façon et, en définitive (19) serait uniquement modifié par l'adjonction de quelques indices économiques dépendant toujours de A fonctions d'une seule catégorie des variables de même nature, tandis que les arguments des équations $F_\alpha = 0$ ne contiendraient que ces mêmes fonctions relatives à la lettre α

Pour ne pas alourdir les notations nous continuerons par la suite à ne raisonner que sur trois groupes de variables, ne généralisant qu'à la fin.

Les résultats déjà très simplificateurs auxquels nous aboutissons n'ont été obtenus qu'en considérant les équations (9) et (10) où l'on faisait $\alpha = \beta$ Considérons maintenant les équations où $\alpha \neq \beta$ (Ce que nous savons maintenant nous permet d'écrire les équations sous la forme

$$(9) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial H_\alpha} \dfrac{\partial H_\alpha}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial x_{1\beta}}{\partial H_\beta} \dfrac{\partial H_\beta}{\partial n_{j\beta}}} \equiv \frac{\dfrac{\partial H}{\partial H_\alpha} \dfrac{\partial H_\alpha}{\partial n_{i\alpha}}}{\dfrac{\partial H}{\partial H_\beta} \dfrac{\partial H}{\partial n_{j\beta}}} \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\beta}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}}$$

ou plus simplement

$$(9) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial H_\alpha}}{\dfrac{\partial x_{1\beta}}{\partial H_\beta}} \equiv \frac{\dfrac{\partial H}{\partial H_\alpha}}{\dfrac{\partial H}{\partial H_\beta}} \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\beta}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots A \\ \beta \neq \alpha = 1, 2, \dots A \end{array}$$

et de même

$$(10) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial I_\alpha}}{\dfrac{\partial x_{1\beta}}{\partial I_\beta}} \equiv \frac{\dfrac{\partial I}{\partial I_\alpha}}{\dfrac{\partial I}{\partial I_\beta}} \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\beta}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots A \\ \beta \neq \alpha = 1, 2, \dots A \end{array}$$

Eliminant entre ces équations le rapport $\dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\beta}}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{1\alpha}}}$

il vient

$$(20) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial H_\alpha}}{\dfrac{\partial x_{1\beta}}{\partial H_\beta}} \frac{\dfrac{\partial I}{\partial I_\alpha}}{\dfrac{\partial I}{\partial I_\beta}} \equiv \frac{\dfrac{\partial x_{1\alpha}}{\partial I_\alpha}}{\dfrac{\partial x_{1\beta}}{\partial I_\beta}} \frac{\dfrac{\partial H}{\partial H_\alpha}}{\dfrac{\partial H}{\partial H_\beta}}$$

(20) montre que le 1er membre, fonction des seules variables

$x_{i\alpha}$ $(i = 2, \dots m)$, H_α, I_α, $x_{j\beta}$ $(j = 2, \dots, m)$, $H_\beta, I_\beta, I_1, I_2, \dots I_A)$

est identique au 2ème membre fonction des seules variables

$x_{i\alpha}$ $(i = 2, \dots m)$, H_α, I_α, $x_{j\beta}$ $(j = 2, \dots, m)$, $H_\beta, I_\beta, H_1, H_2, H_A)$

Toutes ces variables étant indépendantes il s'ensuit que celles figurant dans un seul membre n'interviennent pas en réalité. Mais ces variables provenaient respectivement de

$\dfrac{\partial I}{\partial I_\alpha} \Big/ \dfrac{\partial I}{\partial I_\beta}$ pour $I_1, I_2, \dots I_A$ et de

$\dfrac{\partial H}{\partial H_\alpha} \Big/ \dfrac{\partial H}{\partial H_\beta}$ pour $H_1, H_2, \dots H_A$

On voit donc que $\frac{\partial H}{\partial H_\alpha} \Big/ \frac{\partial H}{\partial H_\beta}$ par exemple n'est fonction que de H_α et H_β et non des autres H_i. Désignons par $h_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ cette fonction

$$(21) \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\alpha}}{\frac{\partial H}{\partial H_\beta}} \equiv h_{\alpha\beta}$$

Nous allons voir que $h_{\alpha\beta}$ est de la forme $h_\alpha(\alpha)\ h_\beta(\beta)$. Nous pouvons en effet écrire avec un 3e groupe de variables

$$(22) \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\beta}}{\frac{\partial H}{\partial H_\gamma}} \equiv h_{\beta\gamma}(\beta, \gamma) \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\alpha}}{\frac{\partial H}{\partial H_\gamma}} \equiv h_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma)$$

En combinant (21) et (22) on trouve

$$(23) \qquad h_{\alpha\gamma} \equiv \frac{h_{\alpha\beta}}{h_{\gamma\beta}}$$

Nous pouvons dans (23) donner à β une valeur fixe β_0 puisque $h_{\alpha\gamma}$ ne dépend pas de H_β, $h_{\alpha\beta_0}$ et $h_{\gamma\beta_0}$ seront des fonctions de H_α et H_γ seuls. D'où

$$(24) \qquad h_{\alpha\gamma} \equiv \frac{h_\alpha(H_\alpha)}{h_\gamma(H_\gamma)}$$

Dans (24) jusqu'ici γ peut prendre toute valeur 1, 2, ...A sauf la valeur β. Les équations (24) nous permettent en tous cas d'écrire

$$(25) \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\alpha}}{h_\alpha} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\gamma}}{h_\gamma} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_1}}{h_1} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_2}}{h_2} \equiv \dots \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_A}}{h_A}$$

Mais en intervertissant le rôle des variables α et β par exemple nous pouvons écrire, k_i désignant une fonction de la seule variable H_i

$$(26) \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\beta}}{k_\beta} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\gamma}}{k_\gamma} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_1}}{k_1} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_2}}{k_2} \equiv \dots \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_A}}{k_A}$$

La comparaison de (25) et (26) montre immédiatement que les fonctions h et k de même indice sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité pouvant d'ailleurs être pris égal à un par homothétie. Mais alors chacun des systèmes pourra être complété par celui des rapports qui lui manquait et l'on aura identiquement de 1 à A sans exception

$$(27) \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial H_1}}{h_1} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_2}}{h_2} \equiv \dots \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\alpha}}{h_\alpha} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\beta}}{h_\beta} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_\gamma}}{h_\gamma} \equiv \dots \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_A}}{h_A}$$

Désignons maintenant par $\mathcal{H}_i$ une fonction de H_i seul, primitive de h_i. On a donc

(28) $$\frac{d\mathcal{H}_i}{dH_i} = h_i \qquad \text{i variant de 1 à A}$$

Posons

(29) $$\overline{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \ldots\ldots \mathcal{H}_A$$

D'où $$\frac{\partial H}{\partial H_i} \equiv \frac{d\mathcal{H}_i}{dH_i} = h_i$$

(27) alors s'écrit sous la forme équivalente

(27) $$\frac{\frac{\partial H}{\partial H_1}}{\frac{\partial \overline{H}}{\partial H_1}} \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_2}}{\frac{\partial \overline{H}}{\partial H_2}} \equiv \ldots\ldots \equiv \frac{\frac{\partial H}{\partial H_A}}{\frac{\partial \overline{H}}{\partial H_A}}$$

Nous voyons encore que H est une fonction arbitraire de $\overline{H}$ seul. De même I sera une fonction arbitraire d'une fonction $\overline{I}$ de la forme

(30) $$\overline{I} = \mathcal{J}_1(I_1) + \mathcal{J}_2(I_2) + \ldots\ldots + \mathcal{J}_A(I_A)$$

et G une fonction arbitraire de $\overline{G}$

(31) $$\overline{G} = \mathcal{G}_1(G_1) + \mathcal{G}_2(G_2) + \ldots\ldots + \mathcal{G}_A(G_A)$$

Formes associées des fonctions $\chi_i(H_i, J_i)$ H, I, G.

Il n'est pas moins général (et il sera plus simple pour les calculs) de prendre pour H, I, G, des fonctions de la forme $\overline{H}$, $\overline{I}$, $\overline{G}$.

Il est clair par ailleurs que les variables essentielles sont les H_i, les I_i et les G_i. Pour exprimer que $\overline{H}$, $\overline{I}$, $\overline{G}$ sont liées par une relation Φ il va nous être commode d'écrire que, pour chaque système de valeurs des variables indépendantes H_J, I_J, les différentielles $d\overline{H}$, $d\overline{G}$, $d\overline{I}$ sont liées par une relation linéaire et homogène, le coefficient de $d\overline{G}$ n'étant pas nul (la production en effet doit aboutir à quelque résultat).

(32) $$d\overline{G} = a\,d\overline{H} + b\,d\overline{I}$$

Cette identité en dH_j, dI_j quel que soit j, entraîne

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial \chi_j}\,\frac{\partial \chi_j}{\partial H_j} \equiv a\,\frac{d\mathcal{H}_j}{dH_j}$$

D'où $$a \equiv \frac{\frac{\partial G}{\partial \chi_j}\,\frac{\partial \chi_j}{\partial H_j}}{\frac{d\mathcal{H}_j}{dH_j}} \qquad \text{quel que soit j}$$

a pouvant s'exprimer au choix par une fonction d'une variable indépendante d'indice j arbitraire ne peut être qu'une constante car entre deux systèmes de valeurs de toutes les variables on peut opérer un passage au moyen de 2 autres systèmes ayant une valeur commune de variable de certain indice.

Par analogie b est de même une constante absolue.

Mais alors (32) s'intègre immédiatement en donnant

(33) $$\bar{G} = a\bar{H} + b\bar{I} + C$$

Nous pouvons dans (33) faire rentrer c dans une des fonctions G, H ou I et remplacer a H et b I par de nouvelles notations H et I et l'on aura identiquement

(34) $$\bar{G} = \bar{H} + \bar{I}$$

ou encore

$$\mathcal{G}_1(G_1) + \mathcal{G}_2(G_2) + \dots \mathcal{G}_A(G_A) = \mathcal{H}_1(H_1) + \mathcal{H}_2(H_2) + \dots \mathcal{H}_A(H_A) + \mathcal{I}_1(I_1) + \mathcal{I}_2(I_2) + \dots + \mathcal{I}_A(I_A)$$

et comme G n'est fonction que de H_J et I_j on devra avoir

(35) $$\mathcal{G}\ (G_J) = \mathcal{H}_J(H_J) + \mathcal{I}_J(I_J) \quad \text{quel que soit } j$$

La relation (35) doit être vérifiée compte tenu de la relation (18) (où l'on fait $\alpha = j$). C'est donc que la relation (18) ou encore les équations de production $F\alpha = o$ doivent se ramener à la forme suivante :

$$\mathcal{G}_\alpha\left[G_\alpha(x_{1\alpha}, x_{2\alpha}\ ,\ x_{m\alpha})\right] = \mathcal{H}_\alpha\left[H_\alpha(n_{1\alpha}, n_{2\alpha} \dots n_{r\alpha})\right] + \mathcal{I}_\alpha\left[I_\alpha(z_{1\alpha}, \dots z_{s\alpha})\right]$$

ou encore en remarquant que $\mathcal{G}_\alpha(G_\alpha), \mathcal{H}_\alpha(H_\alpha), \mathcal{I}_\alpha(J_\alpha)$ sont simplement trois symboles de fonctions, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME

Pour qu'il puisse exister, dans les conditions de l'énoncé trois indices X, N, Z, de la production seule, du travail seul et des capitaux seuls, liés par une relation F (X, N, Z) = 0 il faut et il suffit que les fonctions de production individuelles puissent se ramener à une somme de trois fonctions respectivement des produits fabriqués, du travail, et des capitaux utilisés par chaque entreprise. Dans ces conditions on pourra prendre (et cette restriction n'est qu'apparente puisque G, H, I ne sont évidemment définis qu'à une fonction d'eux-mêmes près)

$$H = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \dots + \mathcal{H}_\alpha + \dots + \mathcal{H}_A$$
$$I = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \dots + \mathcal{I}_\alpha + \dots + \mathcal{I}_A$$
$$G = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_\alpha + \dots + \mathcal{G}_A$$

et dans ces conditions ϕ s'écrira

$$G = I + H$$
$$\text{ou} \quad X = N + Z$$

Extension à un plus grand nombre de groupes d'arguments.

Il est clair que les remarques faites après le système (19) s'appliquent encore aux équations que nous avons traitées et que si des raisons économiques poussaient à considérer d'autres découpages des arguments des fonctions de production, le théorème s'étendrait immédiatement.

PORTÉE DU RÉSULTAT

Ceci posé il convient de réfléchir sur les conséquences possibles du théorème.

Une première remarque est qu'il est rare qu'on puisse trouver une seule relation technique liant le produit (ou les produits) aux facteurs de production (travail, machines, matières premières, etc...) et épuisant à elle seule la technique d'une entreprise. Mais, comme nous le verrons dans une analyse que nous donnerons dans la deuxième partie en II 3.2a, la production d'une entreprise peut se décrire au moyen d'un seul paramètre ou d'un petit nombre de paramètres caractérisant la ou les techniques employées. Au lieu donc d'une seule équation liant les x_i, n_j, z_k, il semble qu'il est beaucoup plus conforme à la réalité d'exprimer au contraire les x_i, n_j, z_k au moyen d'un petit nombre de paramètres arguments.

On peut toutefois signaler comme exemple celui de l'exploitation des lignes téléphoniques où le nombre de communications possibles en un temps donné est une fonction à peu près linéaire non seulement du nombre de postes téléphoniques, mais aussi du nombre des centraux, des lignes et de certains appareils de recherche, de branchement, etc..., équipant les centraux.

Cependant même dans ce cas il nous faut faire une deuxième remarque : les possibilités d'agrégation que nous avons mises en évidence nous conduisent à ajouter telles quelles des parties de fonctions de production individuelles. Mais pour connaître ces parties, encore faut-il connaître très précisément chacune des fonctions de production elles-mêmes et l'on ne voit pas l'économie de travail permise. Chose beaucoup plus grave, les fonctions X, N, Z n'ont pas d'interprétation technique : il est manifestement formel d'ajouter des nombres qui mesurent des fonctions d'unités d'espèces hétérogènes, les x_i et les z_k pourront être tout à fait distincts selon l'entreprise considérée. Le problème tel qu'il a été posé ne nous a donc pas suggéré d'agrégat semblant valoir la peine d'être retenu.

Cependant, dans la vie, il s'est introduit historiquement un type au moins d'agrégat largement défini : c'est l'agrégat linéaire qui donne à un moment donné la valeur d'un ensemble de biens par sommation des valeurs de chacun des biens. La forme même de solution que nous avons reconnue à l'instant nous oblige à remarquer (mais pas du tout à découvrir ce qui date de bien longtemps) qu'on peut concevoir un agrégat X' qui représenterait la valeur de la production d'une entreprise; N' la valeur des salaires et Z' la valeur de dépréciation des capitaux. Bien des théories donnent entre ces valeurs une relation de la forme

$$X' = (1 + \tau)(N' + Z')$$

τ étant un nombre positif représentant un taux de profit, ou des relations analogues qui semblent jouer le rôle de la fonction $\phi(X, N, Z) = 0$. Il ne s'agit pas ici pour nous de retrouver des égalités de ce type, mais de nous demander pourquoi nous ne les avons pas retrouvées. La réponse est facile : c'est que nous ne sommes pas partis de relations économiques (liant en particulier les $x_{i\alpha}, n_{j\alpha}, z_{k\alpha}$ qui doivent avoir un prix ne dépendant que du premier indice, i, j ou k, mais de relations techniques où les agrégats comme nous l'avons vu n'existent que rarement et sans être d'ailleurs intéressants.

Le problème posé par Klein, surtout une fois qu'on en a vu la solution, est donc en quelque sorte trop pauvre, trop abstrait de la théorie

économique. Ce défaut avait été remarqué par Shou Shan Pu et Kenneth O. May qui avaient proposé une autre approche. Sans nous inspirer très directement pour l'instant de leurs idées nous allons étudier un problème d'agrégation qui se pose dans le cadre de la théorie des choix, théorie qui constitue une base plausible d'explication de la consommation. Cependant, dans le cadre de cette théorie, le problème cherche à épuiser une possibilité complète d'agrégation des individus dans leur comportement de consommateur. Aussi en raison de la généralité de cette possibilité, en raison également du caractère très flou de structure qu'impose la théorie des choix, traitons-nous ce problème dans ce premier chapitre.

I. 2 — POSSIBILITÉ D'AGRÉGATION COMPLÈTE DE LA CONSOMMATION DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DES CHOIX (1)

I. 2.1 - ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Considérons n biens de consommation B_1, B_2 .... B_n et une société composée d'un certain nombre fixe d'individus I. Dans une situation donnée, mais à part cela quelconque de prix, caractérisée par une direction Π de plan de budget, les individus I règlent leur consommation en maximant leur satisfaction selon leur revenu. Nous nous proposons de rechercher quelle doit être la forme des surfaces d'indifférence des I pour que, quel que soit le point moyen G de consommation de la société, et quels que soient les revenus individuels des I pourvu que leur ensemble donne G comme point moyen, on puisse trouver une famille fixe de surfaces (H) dont une et une seule passe par G en admettant en ce point un plan tangent parallèle à Π.

En d'autres termes nous prenons pour agrégats les sommes des différents biens consommés et la somme des revenus et nous voulons que ces agrégats suivent eux aussi la théorie des choix.

I. 2.2 - UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE POSSIBILITÉ D'AGRÉGATION

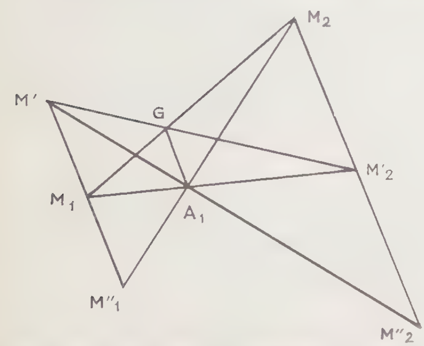
Désignons par Ox_1, Ox_2 .... Ox_n les axes correspondant aux biens B_1, B_2 ... B_n. Soient deux individus ou plutôt (pour pouvoir par la suite tenir compte de consommations moyennes pondérées) deux groupes d'individus identiques à l'intérieur de chaque groupe, I_1 en proportion a_1 et I_2 en proportion a_2 $(a_1 + a_2 = 1)$ de plans de budget Π_1 et Π_2 tangents en M_1 et M_2 à leurs surfaces d'indifférence Σ_1 et Σ_2 de revenus r_1 et r_2.

Le point G sera le centre de gravité des points M_1 et M_2 pondérés par a_1 et a_2. Le plan de budget passant par G correspond à un revenu $r_G = a_1 r_1 + a_2 r_2$.

Nos conditions imposent à G de ne pas changer à situation de prix donnée si r_G (ou le plan de budget) ne varie pas. Or, l'on peut évidemment faire varier r_1 et r_2 (supposés toujours positifs) de façon que leur moyenne pondérée reste toujours égale à r_G. Soient alors M'_1 et M'_2 les points représentatifs des consommations de I_1 et I_2 dans une de ces situations. Leur centre de gravité doit être le même point G. Donc $M_1 M_2$ et $M'_1 M'_2$ doivent se couper en G et de plus G divise dans le même rapport les segments $M_1 M_2$ et M'_1 et M'_2. Donc $M_1 M'_1$ et $M_2 M'_2$ sont parallèles et dans ce

(1) Nous reproduisons ici presqu'intégralement un article paru dans la revue Métroeconomica, au 1er trimestre 1953.

même rapport (d'après la réciproque du Théorème de Thalès qui jouera un grand rôle au fond dans cette question). Mais nous pouvons aussi considérer dans la même situation de prix une autre situation de revenu de I_1 et



I_2 où les consommations de ces groupes sont par exemple représentées par M_1et M'_2. La consommation moyenne sera représentée par le point A_1 divisant $M_1 M'_2$ dans le même rapport que G divise $M_1 \quad M_2$ ou $M'_1 \quad M'_2$. Par conséquent G A_1 est parallèle à $M_2 M'_2$ et donc aussi à $M_1 M'_1$. Mais de plus A_1 doit également être obtenu en raison de l'unicité de la consommation moyenne correspondant à un système de prix et à un revenu global donné, à partir de M'_1et d'un point M''_2 consommation de I_2 dont la composition avec M'_1 redonne A_1. $M'_2 \; M''_2$ est alors parallèle à $M_1 \; M'_1$ donc à $M_2 \; M'_2$. Par suite $M_2 \; M'_2 \; M''_2$ sont alignés et de plus $M_2 \; M'_2 = M'_2 \; M''_2$.

Par un raisonnement analogue on peut, pour la même situation de prix et des revenus variables de façon égale, déduire de $M_2 \; M'_2$ des points M'''_2, M^{IV}_2 etc... (des deux côtés de $M_2 M'_2$ d'ailleurs au moins tant que toutes les composantes des biens et tous les revenus sont positifs) alignés et équidistants entre eux. Or, on peut prendre $M_2 \; M'_2$ aussi petit que l'on veut. En particulier si d r est la variation de revenu correspondant à $M_2 \; M'_2$ on peut prendre une variation de revenu $\frac{dr}{N}$, N étant un entier. Nous obtiendrons pour ces N variations égales des points alignés entre eux, équidistants, dont le premier est M_2 et dont le dernier coïncide avec M'_2. En supposant, ce qui semble légitime, la continuité des variations des surfaces d'indifférence et de leurs plans tangents, on voit que les consommations correspondant, à prix donnés, à tous les revenus possibles sont, pour un individu I_2, sur une droite D_2 (et vice-versa, en raison de la façon dont ces consommations ont été obtenues, en se limitant évidemment aux consommations positives), restriction assez importante surtout pratiquement lorsque les revenus sont très différents. Il en est donc de même évidemment pour tous les individus. De plus comme $M_1 \; M'_1$ et $M_2 \; M'_2$ sont parallèles, on voit que les droites D_1 et D_2 et par suite toutes les droites D sont parallèles entre elles, de direction Δ, coupant d'ailleurs la direction Π.

Nous dirons dorénavant que les directions Δ et Π sont conjuguées. Les droites D sont les courbes d'Engel pour chacun des I.

En définitive, une condition nécessaire d'agrégation pour deux groupes d'individus (et par suite pour un nombre quelconque) est que les courbes d'Engel relatives à ces individus soient des droites parallèles entre elles (mais dont la direction peut parfaitement dépendre de celle du plan de budget).

Cette condition est aussi suffisante. Si en effet les courbes d'Engel sont des droites Di parallèles pour tous les individus la consommation moyenne sera évidemment d'abord sur une droite $\bar{D}$ parallèle aux Di et passant par le barycentre des points d'intersection des Di avec un plan fixe, quels que soient les revenus des I. De plus l'abscisse de G sur cette droite a des variations qui sont les moyennes des variations des abscisses des points représentatifs des consommations individuelles. A prix donné ces

variations étant proportionnelles à celles des revenus, G ne variera donc pas si la variation globale des revenus est nulle.

Nous pouvons maintenant remarquer que tous les résultats sont établis en se basant sur l'hypothèse suivante de la théorie des choix : à un système de prix et un revenu donnés, il correspond une consommation bien déterminée et une seule. Cette correspondance, pourvu évidemment qu'elle existe avec les propriétés d'ordre habituellement exigées par la théorie des choix, n'a même pas besoin d'être une correspondance de contact entre plan de budget et surface d'indifférence, mais seulement une correspondance d'appui.

Nous allons alors montrer, en nous aidant de la condition de linéarité et de parallélisme des courbes d'Engel que les consommations moyennes G peuvent bien s'obtenir comme point de contact (ou d'appui) de surfaces d'indifférence (H) avec un plan de budget global donné [1].

I. 2.3 - DÉTERMINATION DES SURFACES D'INDIFFÉRENCE DES CONSOMMATIONS AGRÉGATS

Pour cela nous allons construire à partir des familles de surfaces d'indifférence Σ_j des différents individus I_j de la société des surfaces dont nous verrons que ce sont les surfaces (H).

Reprenons toujours nos deux individus I_1 et I_2 et supposons que leurs satisfactions restent constantes. La consommation M_1 de I_1 décrira donc une certaine surface Σ_1^o et celle M_2 de I_2 une surface Σ_2^o. De plus les plans tangents Π_1 et Π_2 en M_1 et M_2 à Σ_1^o et Σ_2^o sont parallèles. Recherchons alors le lieu Σ_g^o de G ou plutôt établissons la propriété suivante de Σ_g^o : le plan tangent Π en G à Σ_g^o est parallèle à Π_1 et Π_2. Ceci est évident car le déplacement de G est une moyenne pondérée des déplacements de M_1 et M_2. Lorsque les déplacements (infinitésimaux) de M_1 et M_2 sont parallèles à la direction de Π_1 et Π_2, celui de G en raison de cette linéarité et homogénéité sera aussi parallèle à Π_1 et Π_2. Par conséquent l'élément de contact en G à Σ_g^o sera parallèle à la direction du budget. Il reste à établir que cet élément est bien de la même dimension que Π_1 et Π_2 (supposés de (n-1) dimensions tous les deux). Il revient au même et il est même préférable, il est plus direct, de démontrer que Σ_g^o a même dimension que Σ_1^o et Σ_2^o supposés tous deux de même dimension (n-1). Pour cela supposons que G soit un point de Σ_g^o obtenu à partir de deux points M_1 et M_2 de Σ_1^o et Σ_2^o. Nous allons démontrer qu'il existe un point G' de Σ_g^o dont on peut se donner arbitrairement n-1 coordonnées à condition qu'elles soient suffisamment voisines de celles de G. Si l'on fait en effet un tel choix des n-1 premières coordonnées le lieu de G' sera une droite L. S'il existe un point G' de L sur Σ_g^o il proviendra de deux points M'_1 et M'_2 de Σ_1^o et Σ_2^o qu'il divisera dans le rapport opposé et inverse des poids affectés à I_1 et I_2. Une homothétie négative de pôle G et de même rapport doit donc amener Σ'_ℓ, transformée de Σ_1^o à être tangente à Σ_2^o en M'_2. Ceci suggère donc d'opérer une telle homothétie, mais à partir de tous les points de L (puisque G' est encore à déterminer). On obtiendra ainsi une famille de surfaces Σ_ℓ qui se déduisent de l'une d'entre elles par des translations parallèles à L. Ces surfaces Σ_ℓ peuvent de plus se déduire par des translations T de la surface Σ'_g semblablement définie avec le point G, supposé déjà déterminé, comme centre d'homothétie, en raison de la correspondance entre 2 homothéties de même module.

---

(1) Notons avec soin que ceci ne suppose aucun jugement d'existence sur la notion de surface d'indifférence pour une société.

Etant donné que G est voisin de L, certaines de ces translations T sont petites en modules. On peut les définir comme ayant pour origine M_2 et pour extrémité un point variable sur une droite L' déduite de L par une translation qui l'amènera à être voisine de M_2. Par ailleurs Σ'_g et Σ°_2 sont tangentes de chaque côté du plan tangent Π_2 en raison de l'homothétie négative d'une part et du fait que pour des surfaces d'indifférence les plans tangents sont plan d'appui d'un même côté opposé à l'origine (c'est même leur propriété de base). Par conséquent en raison de la proximité de G et L et M_2 et L' certaines surfaces Σ'_ℓ que nous appellerons Σ^e_ℓ seront d'un autre côté de Π_2 que Σ°_2. L', voisin de M_2, coupe Σ°_2 qui est de dimension n-1, si elle coupe Π_2, ce qui est réalisé si les n biens ont un prix fini. Soit N_2 ce point de rencontre de L' et Σ°_2. La surface Σ^i_ℓ déduite de Σ'_g par la translation $M_2 N_2$ coupe donc Σ°_2 en N_2. On voit donc qu'au cours de la translation continue suivant L ou L' qui amène des Σ^e_ℓ à Σ^i_ℓ il y aura une position de transition où Σ°_2 aura un plan d'appui (plan tangent en général) commun avec une Σ'_ℓ en un point commun M'. Ce contact (ou appui) n'est d'ailleurs possible qu'en deux points homologues car à une direction de plan de budget et à une surface d'indifférence ne correspond qu'un point de contact, propriété invariante par homothétie. Il existera donc un point de L correspondant à ce point M' et ce point sera le point G' cherché. (Cette démonstration n'exige même qu'une seule des surfaces Σ°_1 au Σ°_2 soit de dimension n-1).

Laissant maintenant Σ°_1 fixe et faisant varier les Σ°_2 on détermine une famille à un paramètre continu de surfaces Σ_g. Ces Σ_g sont tangentes, à situation de prix donnée, et à revenu donné, aux plans de budget correspondant à un certain revenu moyen de I_1 et I_2, en un point correspondant à la consommation moyenne. Si l'on avait fait varier simultanément les Σ_1 et Σ_2 on aurait retrouvé (à vrai dire par recoupements successifs, en raison des conditions de positivité imposées aux revenus et aux biens) ces mêmes surfaces Σ_g étant donnée leur définition commune par élément de contact à (n-1) dimensions. A partir de l'ensemble de ces Σ_g (obtenu au moyen de toutes les associations des Σ_1 et Σ_2) on peut continuer avec les surfaces Σ_3 relatives à un individu I_3 et ainsi de suite. Il est bien évident qu'on arrivera ainsi à des surfaces (H) tangentes au point de consommation moyen de la société au plan de budget moyen de la société.

(Remarquons d'ailleurs que nos démonstrations se sont appuyées dans le fond uniquement sur l'existence de plans d'appui, plutôt que de plans tangents, ce qui assure un caractère très large aux résultats).

D'une façon générale nous avons non seulement trouvé ce qu'on peut appeler les surfaces de consommation de la société, mais même montré que si le point moyen décrit ces surfaces on peut, et d'une infinité de façons, faire décrire conjointement à chaque individu une de ses surfaces d'indifférence.

Arrivé à ce stade de nos résultats on pourrait toutefois se demander si, en composant directement les n consommations (au lieu de commencer par I_1 et I_2 et leur imposer déjà une possibilité d'agrégation) on ne pourrait pas avoir agrégation dans des conditions moins restrictives. En réalité étant donné les strictes conditions d'agrégation possible dans tous les cas que nous avons imposées, il est clair qu'on peut fixer (n-2) revenus et exiger l'agrégation pour les 2 restant, dans toutes leurs variations possibles.

Cependant l'idée de l'objection mérite ici encore comme pour la production, qu'on s'y arrête. Cette objection revient à demander d'étudier les possibilités d'agrégation non pas lorsque les prix et les revenus varient de

toutes les façons possibles, ce qui n'a pas d'intérêt, voire même de sens, économiquement parlant, mais en restant dans une certaine classe C plus restreinte de variations au sein de laquelle se trouve la variation effective des prix et des revenus des membres de la société étudiée, variation correspondant à une valeur de l'ensemble des paramètres qui gouvernent la classe C. Il est certain que si C est une classe se rencontrant dans la vie économique réelle et si il y a possibilité d'agrégation de forme donnée au préalable pour C, ce résultat sera plus large à l'intérieur de C que le résultat auquel nous sommes arrivés lorsque les variations de revenus étaient arbitraires. C'est en partant de ce point de vue que nous dirigerons nos recherches dans la 2ème partie de ce travail.

Dans nos hypothèses actuelles les résultats établis nous permettent, si l'on connaît n familles de surfaces d'indifférence, de dire s'il y a ou non possibilité d'agrégation.

I. 2.4 - CONSTRUCTION GÉNÉRALE DES SURFACES D'INDIFFÉRENCE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ DANS LE CAS D'AGRÉGATION

Mais il serait également intéressant de construire à priori toutes les familles de surfaces d'indifférence pour lesquelles le problème est possible : D'après notre étude il suffira de déterminer tous les couples de 2 familles de surfaces d'indifférence pour lesquelles les points de contact des plans tangents (ou d'appui) parallèles à une direction quelconque Π sont deux droites parallèles entre elles (leur direction pouvant toutefois varier avec celle de Π) ou plus brièvement pour lesquelles les courbes d'Engel sont des droites parallèles pour une même direction de plan de budget. Remarquons déjà qu'économiquement cela voudra dire que pour une situation de prix donnée, les variations (en général virtuelles d'ailleurs) de consommation sont proportionnelles pour chacun des biens aux variations éventuelles de revenus, selon des rapports fixes indépendants de l'individu considéré.

On voit immédiatement des solutions particulières, par exemple :

1° les deux familles sont constituées de surfaces déduites de deux surfaces quelconques par une translation de module variable mais de direction fixe.

2° les deux familles sont confondues en une seule formée de surfaces homothétiques entre elles par rapport à un pôle fixe.

(Remarquons à ce propos que le fait d'avoir même famille de surfaces d'indifférence pour tous les individus ne suffit nullement à assurer l'agrégation, en raison de la diversité possible des revenus).

Mais revenons à la recherche de la solution générale. Dans le cas de deux biens le problème est très simple : il suffit de se donner deux familles de droites D_1 et D_2 et d'attacher à deux droites parallèles de la même famille une même direction conjuguée en chacun de leurs points. On définit ainsi deux champs d'éléments de contact qui, dans des conditions très larges, admettront des courbes enveloppes, intégrales des équations différentielles que les deux champs définissent.

Mais dès que l'on passe à 3 biens on ne peut dire qu'aux champs d'éléments de contact que l'on peut définir à priori correspondent des multiplicités intégrales à deux dimensions. Il n'en est même pas ainsi en général. Sans étudier le problème analytiquement on peut, d'après les propriétés mêmes que nous avons établies, trouver d'abord la famille la plus généra-

le des surfaces pour lesquelles les courbes d'Engel sont des droites (ou portions de droites). Il est clair qu'on ne restreint pas la généralité en partant de deux surfaces quelconques qui seront destinées à faire partie de la famille. Soient S_1 et S_2 ces surfaces. Associons sur S_1 et S_2 leurs points en couples M_1 et M_2 où les plans tangents respectifs soient parallèles entre eux. D'après ce que nous avons vu en I.2.3, les lieux des points M_k divisant $M_1 M_2$ dans un rapport donné k sont des surfaces S_k et, en M_k leur plan tangent est parallèle aux plans tangents en M_1 et M_2 à S_1 et S_2. Il est certain par ailleurs qu'il ne peut y avoir que cette solution puisque le système correspondant de points et plans liés est complètement intégrable (on a en effet trouvé une solution) et qu'en conséquence on sait qu'il n'a alors qu'une solution (1).

Il reste cependant à chercher comment on peut associer avec S_k une autre famille pour laquelle les directions conjuguées soient les mêmes. Pour le voir il suffit de se laisser guider par l'idée intuitive suivante : si l'on considère les surfaces S_1 pour lesquelles k est voisin de 1 les points de ces surfaces sont très éloignés, mais les directions conjuguées n'en subsistent pas moins, la position des droites D n'intervenant plus. Pour ne conserver que les propriétés de direction prenons alors un point fixe O et menons $\overline{OM} = \overline{M_1 M_2}$. Le déplacement de M est la différence de ceux de M_2 et M_1 donc parallèle à Π_1 et Π_2 et par suite le plan tangent (d'appui) du lieu S de M sera conjugué avec O M.

Cette propriété admet manifestement une réciproque : Considérons en effet une surface S quelconque a priori. En chacun de ses points M menons son plan tangent de direction Π auquel nous faisons correspondre la direction conjuguée D parallèle à O M, O étant un point fixe.

Partons maintenant de surfaces S_1, S_2... etc ... et couplons les points M_1, M_2, ... de ces surfaces où le plan tangent est parallèle à Π. Si l'on associe à M_1, M_2... les droites D_1, D_2... parallèles à D et issues de M_1, M_2... et si à D_1, D_2 on associe en chacun de leurs points la direction de plan conjuguée à D, il est clair qu'on obtient des systèmes complètement intégrables.

Il suffit en effet de porter à partir de M_1, M_2... et sur D_1, D_2, des segments de même longueur u OM, soient M_1N_1, M_2N_2...

N_1 et N_2 ont en effet des déplacements sommes de ceux de M_1 et M_2 situés dans Π et de u fois celui de M qui est également dans Π

Cette étude (2) nous indique le procédé général le plus simple, semble-t-il, pour obtenir les couples de familles de surfaces d'indifférence considérées, sous la réserve toutefois que ces surfaces aient, dans leur ensemble la forme de surfaces d'indifférence. Ceci nous amènera évidemment à prendre pour S_1, S_2... des surfaces de forme convenable et S convexe par rapport à O. Il est certain que les surfaces que nous construirons conviendront au voisinage des surfaces de base S_1, S_2..., mais que nous devrons nous arrêter à un certain moment, au moins en particulier lorsque l'une des coordonnées deviendra négative. Ces conditions sont cependant moins importantes dans les applications qu'il ne pourrait le paraître car le véritable problème consiste, à partir de variations constatées dans les con-

(1) On voit ici une raison de plus pour laquelle en composant deux individus nous avons pondéré leur consommation : c'est pour nous servir ici avec k quelconque, du résultat établi plus haut.

(2) En terminant indiquons que Mr. W.M. Gorman de l'Université de Birmingham, partant d'une question de rendement social maximum est arrivé aux mêmes résultats. On peut d'ailleurs démontrer l'équivalence a priori des deux problèmes considérés.

sommations, de déterminer des surfaces du type étudié coïncidant, dans les seuls domaines de variation plausibles avec les résultats relevés.

I. 2.5 - INTERPRÉTATION DU RÉSULTAT

Si l'on cherche maintenant l'interprétation économique du résultat on voit que, dans cette société, une fois déterminée arbitrairement pour chaque individu une surface d'indifférence de base, toute modification algébrique du revenu se traduit par une même modification de sa consommation. Il est clair, sous cette forme que ceci est irréel, des individus de revenus à l'origine très différents ne réagissant pas du tout de la même façon à une même modification de revenus. L'ouvrier qui voit son salaire augmenter de 3.000 Frs par mois par exemple n'accroîtra pas du tout sa consommation de la même façon qu'un petit industriel dont les dépenses de consommation auront augmenté de 36.000 Frs dans l'année, augmentation qu'il aura sans doute jugée insignifiante. Du reste l'apparition (ou la disparition), constamment constatée, de catégories de biens lorsque l'on considère les consommations de classes sociales bien distinctes, jointe au fait que notre résultat exige pour des classes distinctes des variations de même nature de la consommation (ce qui reviendrait à imposer des consommations négatives de certains produits), limite manifestement la recherche d'agrégation dans ces cas. Ceci confirme combien il est peu admissible a priori de raisonner sur de très grandes quantités globales comme le seul revenu total de la société. S'il n'y a pas d'autres contraintes introduites sur les variations individuelles de revenu, ce théorème prouve en effet que la connaissance de ce seul revenu ne peut renseigner beaucoup sur les composantes globales de la consommation. Aussi la tendance qui prévaut actuellement dans les recherches économiques de délimiter avec soin les ensembles de biens et les groupes socio-économiques sur lesquels on opère une agrégation est-elle pleinement justifiée. On pourrait cependant objecter que si les distributions des goûts des individus et celles de leurs revenus suivaient elles-mêmes des lois stables, de grandes agrégations seraient justifiées. Pour prendre un exemple plus illustratif que réel si une société était stationnaire à tous les points de vue (démographique, technique, économique, etc...) ou ne se développait que par homothétie, on pourrait dire que la consommation globale ne dépendrait que du revenu global. Sans doute l'existence momentanée de certaines stabilités voisines de ce type explique-t-elle que des théories très globales puissent rendre compte de certains faits. Mais cette stabilité, comme on le constate tous les jours n'a rien d'éternel. Les théories globales ne peuvent expliquer en rien les tournants de l'économie, c'est-à-dire justement les points les plus critiques de l'évolution économique. Au contraire, lorsqu'on n'opère pas d'agrégation excessive, on peut espérer déduire des lois stables pour des catégories diverses d'agrégats élémentaires et pouvoir s'en servir pour prévoir avec exactitude les changements de consommation induits par d'importantes variations dans la distribution des revenus par exemple.

I. 3 — CONCLUSIONS SUR L'UTILISATION DE CONCEPTS GLOBAUX ÉTENDUS A TOUTE L'ÉCONOMIE

A la suite des deux questions étudiées respectivement pour la production et la consommation, nous avons indiqué pour chacune le caractère négatif des résultats auxquels nous avons abouti. Ces résultats ont toutefois le mérite de faire ressortir que la recherche de relations globales de même forme que les relations individuelles n'avait pas de fondement logique.

Cette recherche avait été entreprise dans l'espoir de trouver une réponse favorable. Le fait que cette réponse ne soit satisfaisante qu'exceptionnellement doit nous amener à fortiori à étudier le problème de façon plus serrée. Il nous faut mettre la précision et la rigueur de l'instrument mathématique au service non pas de désirs de simplification, mais des problèmes que posent les théories économiques étudiant le réel. Or, les structures du réel (qu'il s'agisse de comportements des consommateurs ou des producteurs, ou qu'il s'agisse de la forme des fonctions de production) malgré leur richesse et leur diversité extrêmes appartiennent à des classes qu'il convient de reconnaître et de délimiter. Le problème de l'agrégation jouant sur des structures beaucoup plus restreintes que les structures beaucoup trop vagues jusqu'ici considérées, sera posé sous son véritable jour.

Dans quelle mesure la solution de ce problème de l'agrégation sera-t-elle possible pour satisfaire des besoins donnés, ou jusqu'à quel degré de finesse devra-t-on descendre dans la recherche des agrégats convenables, jusqu'à quel point une agrégation donnée renseignera-t-elle l'économiste, le dirigeant ou le public, tel est le genre de problèmes que nous devrons nous poser. Le chapitre suivant de notre travail apporte notre contribution dans ce domaine.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES POSSIBILITÉS D'AGRÉGATION DANS LE CADRE D'UNE THÉORIE ÉCONOMIQUE

II. 1 — POSITION DU PROBLÈME

Toute théorie scientifique établit des relations plus ou moins précises entre diverses grandeurs qui sont définies indépendamment les unes des autres à priori. On peut ainsi définir la masse et le volume d'un corps homogène dans certaines conditions extérieures (température, pression, etc...) On sait alors qu'il existe un rapport fixe entre les nombres mesurant ces deux grandeurs. Et cette loi, une fois établie, permet de remplacer l'une par l'autre des mesures de volume ou des mesures de masse.

En son essence une théorie économique poursuit dans son domaine des objectifs analogues. Elle commence par reconnaître des grandeurs économiques A, définies de façon indépendante, puis arrivée à un stade assez évolué elle découvre entre ces grandeurs des relations qui permettent la détermination de ces grandeurs au moyen d'un petit nombre d'entre elles. Ces relations d'ailleurs peuvent, pour une même théorie prendre des formes analytiques diverses, mais peu importe pour l'instant. Ce qui est essentiel c'est qu'on puisse découvrir et poser ces relations et s'en servir pour résoudre le système économique que nous appellerons S. Bien souvent d'ailleurs ces relations dépendent d'un certain nombre de paramètres et la solution de S s'exprimera en définitive en fonction de ces paramètres et de certaines des grandeurs A. Pour éclairer ces généralités par un exemple on peut dire que l'on rencontre souvent des théories permettant de déterminer les grandeurs économiques X_T qu'elles jugent caractéristiques d'une année donnée T au moyen des valeurs qu'avaient prises ces mêmes grandeurs pour l'année T-1 et au moyen de certaines relations R liant les X_T et les X_{T-1} . Mais il se peut, c'est d'ailleurs le cas le plus fréquent, que l'analyse conduisant à la théorie ne fournisse que la forme des relations R et laisse provisoirement indéterminés certains paramètres ϖ. Ces paramètres devront alors être déterminés par exemple grâce à la connaissance ex-post des X_{T_2} et X_{T_1} ou bien encore (et surtout si ces paramètres sont susceptibles de varier lorsque certaines conditions C de structure de l'économie changent) grâce à des relevés statistiques effectués, mettons à la fin de l'année T-1 ou au début de T si l'on est amené à penser que ces conditions C se maintiendront telles quelles durant l'année T. Souvent aussi on se donnera plusieurs jeux de conditions C pour en étudier les diverses conséquences et permettre un choix correspondant à certains critères.

La détermination du système S se ramène donc à la détermination d'un certain nombre de paramètres ϖ et de grandeurs A, en nombre plus réduit que le nombre total des inconnues. Il faudra déterminer ces ϖ et ces A de la manière la plus simple et compte tenu des informations statistiques dont on peut disposer. Or, dans ces domaines les obstacles sont nombreux. Nous en trouvons de deux sortes, en particulier :

1° Même en supposant que la théorie soit en gros conforme au cadre général que nous avons esquissé, la forme même des relations peut rester à déterminer. Nous avons déjà vu que l'expérimentation est impossible en économie. L'économètre devra se contenter d'analyser des statistiques qui pour des raisons, soit pratiques, soit simplement historiques sans grand fondement, se présentent sous une forme donnée a priori. Il devra voir l'information qu'il peut en retirer. Il sera important en particulier de voir avec quelles structures de comportement les agrégats donnés par les statistiques cadreront au mieux. Ceci conduit à proposer des hypothèses de travail qu'il faudra ensuite confronter avec les faits.

Dans cet ordre d'idées on suppose souvent dans les études de consommation qu'on peut agréger des individus de revenu sensiblement égal et nombre de statistiques sont établies d'après cette classification. Nous étudierons, dans le cadre de la théorie des choix à quelles conditions cette hypothèse est valable (plus exactement nous déterminerons certaines conditions suffisantes), et nous verrons si l'on peut utiliser ces conditions pour étudier les comportements.

2° Si l'on suppose connue la forme des relations il peut rester à déterminer les paramètres et les grandeurs inconnus, toujours au moyen des renseignements statistiques disponibles, dont l'étendue et la forme sont souvent peu commodes pour l'économètre. Deux procédures, que l'on peut d'ailleurs combiner, semblent s'ouvrir à nous.

a) On peut imaginer qu'on exprime en fonction des paramètres à rechercher les valeurs que prennent les agrégats donnés par la statistique, et qu'ensuite à partir des statistiques on inverse pour déterminer la valeur des paramètres.

Ce procédé est très général et conceptuellement toujours possible.

b) On cherche à partir du système donné à combiner les équations entre elles de façon à n'introduire que des agrégats de forme connue ou que l'on puisse raisonnablement rechercher statistiquement. Ce procédé peut se déduire de a). Il a l'avantage de ne pas nécessiter l'introduction directe des paramètres et permet de relier directement entre elles les valeurs prises par les différents agrégats considérés, valeurs que l'on peut confronter avec une statistique directe.

L'emploi de 2°b) pour donner la valeur d'ensemble des agrégats combiné avec 2°a) pour explorer de façon plus fine certaines parties de l'économie sera utilisé par nous dans cette deuxième partie pour étudier la production d'un ensemble économique donné.

II. 1.2 - RAPPEL DES IDÉES DE SHOU SHAN PU ET KENNETH O. MAY

Nos idées se sont beaucoup inspirées de celles qu'ont développé Shou Shan Pu (1) et Kenneth May (2). Nous pensons qu'il est bon de les exposer brièvement ci-dessous.

(1) Shou Shan Pu : "A Note on Macroeconomics" In Econometrica - Vol. 14 - N° 4 - Octobre 1946.

(2) Kenneth May : "Technological Change and Aggregation" in Econometrica - Vol.15 - N°1 - Janvier 1947 pp. 61 et 62.

Shou Shan Pu montre, dans une hypothèse d'équilibre marginaliste, qu'il existe un système macroéconomique de même forme que le système complet microéconomique. La solution du système macroéconomique est la somme des éléments de même nature (main-d'œuvre, produit, capital) qui constituent la solution du système microéconomique.

K. May élargit ces conditions. Pour montrer comment on peut trouver des agrégats, il considère un système microéconomique comprenant α variables économiques et β équations indépendantes.

(1) $$f_i(x_1, x_2 \ldots. x_\alpha) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots. \beta$$

et possédant donc $\alpha - \beta = \rho$ degrés de liberté. May se donne alors γ agrégats indépendants définis par

(2) $$X_j = G_j(x_1, x_2, \ldots. x_\alpha) \quad j = 1, 2, \ldots. \gamma$$

On peut alors, si γ est supérieur à ρ constituer $\gamma - \rho$ relations indépendantes entre les X_j, et les X_j seulement.

C'est ce système de $\gamma - \rho$ équations

(3) $$F_i(X_1, X_2 \ldots. X_\gamma) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots (\gamma - \rho)$$

qui, d'après Kenneth May constitue le macromodèle.

Kenneth May remarque ensuite très judicieusement qu'on ne peut se donner arbitrairement les X_j qui doivent avoir un sens économique et statistique de façon qu'il soit possible de tirer des conclusions et d'effectuer des vérifications sur les X_j, alors qu'il est impossible de le faire sur les X . De plus on ne connaît en général que la forme générique des f_i d'où l'on peut espérer déduire la forme également générique des F_i. On pourra ensuite espérer préciser cette forme des F_i en déterminant statistiquement la valeur des paramètres qui y figurent, pourvu que la dimension du macromodèle soit suffisante, soit $\gamma > \rho$

On voit aisément combien ces idées nous ont influencé.

II. 2 — POSSIBILITÉ D'AGRÉGATION DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DES CHOIX ET DANS L'HYPOTHÈSE D'UNE STRUCTURE DONNÉE ÉCONOMIQUE

II. 2.1 - CONDITIONS GÉNÉRALES DE POSSIBILITÉ

Considérons une théorie économique dépendant de paramètres en nombre fini m, que nous désignerons par a, b,... f. Nous supposerons que, quelles que soient les valeurs de ces paramètres et les autres hypothèses que nous pourrons introduire dans II.2, que la théorie vérifie la théorie des choix. Dans notre étude nous n'allons du reste pas beaucoup spécifier la théorie économique mais seulement indiquer certaines restrictions à lui imposer pour pouvoir constituer une agrégation d'un type que nous définirons.

Normalement la connaissance des m paramètres a, b..., f devrait déterminer les prix p_i des biens de consommation que nous supposerons en nombre n et les revenus r_j des N individus I_j constituant la communauté.

Mais pratiquement on ne pourra guère disposer que de statistiques globales. Pourra-t-on les utiliser comme on le ferait de données individuelles ? Il est possible que les liaisons introduites par le nombre fini m de paramètres entre les prix et la distribution des revenus r_j permette, sous des conditions plus larges qu'au § I, 2, de lier par la théorie des choix le revenu moyen et la consommation. Pour le voir désignons par φ^j $(q_1, q_2 \dots q_n)$ en coordonnées ponctuelles ou φ^j $(p_1, p_2 \dots p_n; r_j)$ en coordonnées tangentielles, la fonction d'utilité de l'individu Ij (les q désignant les biens de consommation).

La consommation de l'individu j se détermine au moyen des relations dûes à M. Roy (où l'on pose pour simplifier l'écriture)

(1) $$\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} = \varphi^j_i$$ (2) $$\frac{\partial \varphi_j}{\partial r_j} = \varphi^j_{r_j}$$

(3) $$\frac{q^j_1}{\varphi^j_1} = \dots = \frac{q^j_i}{\varphi^j_i} \dots = \frac{q^j_n}{\varphi^j_n} = - \frac{1}{\varphi^j_{r_j}}$$

ce qui donne (4) $$q^j_i = \frac{\varphi^j_i}{\varphi^j_{r_j}}$$

La consommation moyenne est donc

(5) $$q_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} q^j_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \varphi^j_i / (- \varphi^j_{r_j})$$

avec $$\sum_i p_i q^j_i = r_j$$

S'il y a possibilité d'agrégation on doit avoir, en désignant par φ une certaine fonction d'utilité :

(6) $$q_i = \varphi_i \Big/ \left[-\varphi \left(\frac{1}{N} \sum_j r_j \right) \right]$$

compte tenu de (7) $\sum_i p_i q_i = \frac{1}{N} \sum_j r_j$, qui est automatiquement vérifiée si (6) l'est, en raison de l'homogénéité de degré zéro des fonctions φ, φ^j

On doit donc avoir

(8) $$\frac{- \varphi_i \left(p_1, p_2, \dots p_n; \sum \frac{r_j}{N}\right)}{\varphi_r \left(\sum_j \frac{r_j}{N}\right)} = - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi^j_i}{\varphi^j_{r_j}} \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Ces relations (8) ne doivent être vérifiées que sur les multiplicités M lieux des points obtenus en donnant à a, b, ...f les valeurs qu'ils peuvent prendre. Mais sur M, dans le cadre de la théorie des choix, ces relations doivent être vérifiées pour toutes les variations de prix et revenus possibles à partir simplement du point considéré sur M. Donc les solutions de (8) seront à extraire des solutions à (n-1) dimensions (compte tenu de l'homogénéité en p_1, p_2, ...2) de l'équation aux différentielles totales des surfaces d'indifférence.

(9) $\sum p_i \, d\, q_i = 0$ ou, tenant compte de la relation

$$\sum_i p_i q_i = \frac{1}{N} \sum_j r_j, \quad \frac{1}{N} \sum_j d\, r_j - \sum_i q_i \, d\, p_i = 0 \qquad (10)$$

Compte tenu de la valeur de q_i d'après (5) on voit que (8) se ramène à voir si l'équation

$$(11) \qquad \sum_j d\, r_j + \sum_i d\, p_i \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\varphi_{r_j}^j} = 0$$

admet des solutions homogènes et de degré zéro en $p_1, \ldots p_n$; r_j, à (n-1) dimensions.

L'étude de (11) conduirait à voir si d'abord pour un système de valeurs de p_1, $p_2 \ldots p_n$; r_j compatible avec les paramètres il ne correspond bien qu'un seul point q_1, $q_2 \ldots . q_n$. Ceci étant supposé vérifié il faut ensuite voir si les degrés de liberté du système économique permettent au point q de décrire un volume à n dimensions ou une variété M à moins de n dimensions. Dans le premier cas, en admettant que l'équation (11) admette des solutions à (n-1) dimensions, nous aurons une solution unique pour le système. Dans le 2ème cas il pourra y avoir des conditions de compatibilité à écrire, mais si elles sont vérifiées nous n'aurons pas de solution unique, mais des solutions dont la seule partie intéressante est sur M. Ce cas peut d'ailleurs être plus ou moins compliqué.

Nous ne voyons rien d'autre à dire en général sur (11) ou (8). Mais nous allons passer à l'étude d'un cas particulier important, celui où les revenus r_j sont égaux, indépendants donc de j.

II. 2.2 - CAS PARTICULIER DES REVENUS ÉGAUX

Ce cas schématise, sans cependant trop d'exagération, le cas des groupes socio-économiques dont les ressources, le genre de vie et les activités professionnelles sont voisins, dans la mesure où nous l'indique l'expérience de tous les jours. On a alors l'habitude de considérer que des agrégations partielles, englobant un groupe particulier, sont justifiées et, en tous cas, dans tous les pays du monde on étudie les consommations en groupant les individus suivant de tels critères. Il nous semble donc intéressant et instructif de poser le problème dans le cadre de la théorie des choix et d'essayer de le résoudre. On pourra peut-être par la suite apprécier le bien-fondé du traitement adopté.

Nous considérons donc N individus consommant n biens dont les prix sont p_1, $p_2 \ldots . p_n$. Nous désignerons par r les revenus, égaux de ces N individus. Pour l'étude de la question il n'interviendra que les rapports $\frac{p_i}{r} = u_i$ des prix des différents biens au revenu. Chaque individu est caractérisé par sa famille $(\Sigma)_j$ de surfaces d'indifférence dont l'équation est

$$(2.1) \qquad \varphi^j (q_1, q_2 \ldots . q_n) = C^j$$

en coordonnées ponctuelles et

$$(2.2) \qquad \varphi^j (p_1, p_2 \ldots . p_n; r) = C^j$$

homogène et de degré zéro par rapport à r et aux p en coordonnées tangentielles. Moyennant un changement de notation (2·2) peut s'écrire

$$(2.3) \qquad \varphi^j (u_1, u_2, \ldots . u_n) = C^j$$

Sous la forme (2.3) nous avons l'avantage de n'introduire aucune condition sur les arguments de φ^j et sur la forme de φ^j. Pour l'individu j

les équations donnant sa consommation sont celles donnant le point caractéristique du plan d'équation

$$\sum_i p_i q_i^j = r \quad \text{ou} \quad \sum_i \frac{p_i}{r} q_i^j = \frac{r}{r} \quad \text{ou} \quad \sum_i u_i q_i^j = 1$$

lorsque les u sont liés par (2.3). Ces équations sont donc

$$(2.4) \qquad \frac{q_1^j}{\varphi_1^j} = \dots\dots = \frac{q_i^j}{\varphi_i^j} = \dots\dots \frac{q_n^j}{\varphi_n^j} = \frac{\sum q_l^j u_l}{\sum_k u_k \varphi_k^j} = \frac{1}{\sum_k u_k \varphi_k^j}$$

On a donc

$$(2.5) \qquad q_i^j = \frac{\varphi_k^j}{\sum_k u_k \varphi_k^j} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots\dots n \\ \text{et} \quad j = 1, 2, \dots\dots N \end{array}$$

La consommation moyenne pour les N individus est donc :

$$(2.6) \qquad q_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j} \qquad i = 1, 2, \dots\dots n$$

Pour qu'il y ait possibilité d'agrégation dans le cadre de la théorie des choix il faut et il suffit que l'on puisse aussi écrire

$$(2.7) \qquad q_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k}$$

φ étant une fonction de $u_1, u_2, \dots\dots u_n$

Pour cela il faut et il suffit que φ vérifie le système d'équations aux dérivées partielles

$$(2.8) \qquad \frac{\varphi_i}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k} \qquad i = 1, 2, \dots\dots n$$

(2.8) peut s'écrire

$$(2.9) \qquad \varphi_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j}$$

Sous cette forme on voit aisément que pour que le problème soit possible il faut que l'expression

$$(2.10) \qquad \sum_{i=1}^{n} du_i \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j} \qquad \text{admette un facteur intégrant}$$

$$(2.11) \qquad \lambda\,(u_1, u_2 \dots\dots u_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} u_k\, \varphi k$$

car $\sum \varphi_i \; d\,u_i$ est une différentielle totale exacte. On peut voir que l'existence de ce facteur λ est une condition suffisante. Si l'on trouve en effet pour (2.10) un tel facteur nous serons amenés à écrire

$$(2.12) \qquad \varphi_i = \lambda \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j} \qquad i = 1, 2, \dots\dots n$$

mais en sachant, cette fois-ci que le 2ème membre de (2.12) est bien la dérivée partielle par rapport à u_i d'une même fonction φ. Il restera à voir que $\frac{1}{N} \Sigma u_i \varphi_i$ est bien égal à λ. Or, pour cette dernière condition, on peut écrire à partir de (2-12)

$$(2.13) \qquad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i = \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j}$$

ou, en intervertissant l'ordre des sommations du 2ème membre :

$$= \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i \varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j} = \frac{\lambda}{N} N = \lambda$$

ce qui est bien l'égalité cherchée.

Il ne nous reste donc qu'à exprimer les conditions d'intégrabilité complète de $\sum_{i=1}^{n} du_i \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{\Sigma u_k \varphi_k^j} = 0$ ce qui nous donne, comme on le sait, l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes :

$$(2.14) \qquad \left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{D^j} \left(\frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_k^j}{D^j} - \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_k^j}{D^j} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_h^j}{D^j} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_h^i}{D^j} - \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{D^j} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_k^j}{D^j} \left(\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_i^j}{D^j} - \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi_h^j}{D^j} \right) \end{aligned} \right\} \equiv 0$$

et ce pour tous les triples h, k, i possibles

en posant $\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j = D^j$

On peut utiliser les équations (2.14) pour voir s'il est correct d'agréger des consommations d'individus donnés ou pour rechercher les formes associées des fonctions d'utilité φ^j pour lesquelles l'agrégation est possible.

Le système (2.14) permet d'ailleurs certaines conclusions. Remarquons d'abord, soit par vérification de calcul, soit directement que ce système est identiquement vérifié pour N = 1.

D'autre part nous pouvons poser $\frac{\varphi_i^j}{D_j} = A_i^j$ (2.15)

et
$$\frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\varphi_h^j}{D^j} - \frac{\partial}{\partial u_h} \frac{\varphi_k^j}{D_j} = B_{kh}^j \qquad (2.16)$$

Les équations (2.14) s'écrivent alors

$$(2.17) \qquad \sum_{j=1}^{N} A_i^j \sum_{j=1}^{N} B_{kh}^j + \sum_{j=1}^{N} A_h^j \sum_{j=1}^{N} B_{ik}^j + \sum_{j=1}^{N} A_k^j \sum_{j=1}^{N} B_{hi}^j = 0$$

Cette forme suggère l'étude d'un cas auquel on est conduit par ailleurs pour des raisons économiques. Il semble en effet que si le fait d'appartenir à un même groupe socio-économique a façonné les goûts des individus de

telle façon qu'on puisse réaliser une agrégation de la consommation pour N individus, cette propriété ne repose pas tellement sur les goûts naturels des N individus que sur leur appartenance à un même groupe socio-économique : cette agrégation devra donc être possible non seulement pour les N individus mais pour tout sous-ensemble pris parmi ces N individus.

Supposons en particulier que cette possibilité existe pour tous les groupes de 2 individus pris parmi les N. Il est alors immédiat de voir sur (2.17) que cette condition entraîne que l'agrégation est possible pour des sous-ensembles quelconques de ces N individus. D'après la forme des équations (2.17) en effet, les conditions pour N' individus ne sont autres que la juxtaposition par addition des conditions écrites pour les $\frac{N'(N'-1)}{2}$ combinaisons de 2 individus, conditions supposées vérifiées, et des conditions relatives à un individu qui, elles, sont identiquement vérifiées.

Nous pouvons donc déjà dégager ce théorème :

THÉORÈME - Si dans le cadre de la théorie des choix on peut constituer une agrégation de la consommation pour toutes les combinaisons de 2 individus pris dans une société, on peut alors constituer une agrégation de la consommation pour n'importe quel sous-ensemble d'individus pris dans cette société.

On pourrait aussi supposer certaines agrégations possibles et rechercher si d'autres agrégations n'en sont pas conséquence. Sans développer ce point indiquons comment on pourrait l'étudier. Si dans (2.17) on désigne par $C^{jj'}$ l'ensemble des produits où sont associés les individus j et j', on voit que (2.17) appliqué à L individus s'exprime, pour chaque triple h k i, en égalant à zéro une somme de termes $C^{jj'}$. Ces termes se retrouvent, diversement associés si l'on suppose diverses agrégations A possibles. Si l'on recherche si d'autres agrégations A' ne sont pas conséquence des A on peut considérer les différentes formes linéaires en $C^{jj'}$ obtenues et étudier leur dépendance. S'il y a dépendance on en déduit que certaines agrégations sont conséquence d'autres. On pourra en particulier rechercher si le seul fait de l'existence des A n'entraîne pas que tous les $C^{jj'}$ soient nuls, ce qui permet alors toutes les agrégations concevables entre les L individus.

Nous ne continuerons pas plus avant l'étude du système (2.14). Nous allons étudier le système (2.12) qui lui est dans le fond équivalent et sur lequel apparaissent plus facilement des solutions particulières.

II. 2.2. 1° - Il est d'abord clair que si chacun des termes

$$(2.18) \qquad \frac{\varphi_i^j}{\sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k^j} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

est, pour j fixe la dérivée $\frac{\partial}{\partial u_i}$ d'une fonction $\overline{\varphi}^j$ (2.12) sera vérifié en prenant 1 égal à un. Mais s'il en est ainsi pour chaque valeur de j nous connaissons un facteur intégrant : c'est évidemment $\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j$ et φ^j est la solution correspondante. On doit donc avoir d'après la propriété du rapport de 2 facteurs intégrants :

$$1 \times \mu\ (\varphi_j) = \sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j \quad (2,19)$$

μ étant une fonction dérivable arbitraire.

Les équations des caractéristiques de (2.19) s'écrivent

$$(2.20) \qquad \frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{u_2} = \dots\dots = \frac{du_i}{u_i} = \dots\dots \frac{du_n}{u_n} = \frac{d\varphi^j}{\mu(\varphi^j)}$$

Elles ont pour solution

$$\frac{u_2}{u_1} = t_2 \dots\dots \frac{u_i}{u_1} = t_i \dots\dots \frac{u_n}{u_1} = t_n \quad \frac{\psi(\varphi^j)}{u_1} = t$$

t, $t_2 \dots\dots t_n$ étant des constantes $\overline{\psi}$ étant une certaine fonction provenant de μ. La solution générale de (2.19) est donc

$$F\left(\frac{\overline{\psi}(\varphi^j)}{u_1}, \frac{u_2}{u_1}, \dots\dots, \frac{u_n}{u_1}\right) = 0$$

ou

$$\overline{\psi}(\varphi^j) = u_1 \times f^j\left(\frac{u_2}{u_1} \dots\dots \frac{u_n}{u_1}\right) \qquad (2.21)$$

Sous la forme (2.21) on reconnaît que

$$\varphi^j = \overline{\psi}^{-1}\left[u_1 f^j\left(\frac{u_2}{u_1} \dots\dots, \frac{u_n}{u_1}\right)\right]$$

ou

$$\varphi^j = \psi\left[h^j(u_1, u_2 \dots\dots u_n)\right] \qquad (2.22)$$

$h^j(u_1, u_2 \dots\dots u_n)$ étant une fonction homogène de degré 1 des variables u_1, $u_2 \dots\dots u_n$. Comme les fonctions d'utilité sont définies par $\varphi^j = c^{te}$ on voit qu'on peut tout aussi simplement caractériser les φ^j comme étant égales à $h^j(u_1, u_2 \dots\dots u_n)$.

A ce moment d'après l'identité d'Euler

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi^j_k = \sum_{k=1}^{n} u_k h_k = h(u_1, u_2 \dots\dots u_n) \qquad (2.23)$$

et

$$\frac{\varphi^j}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi^j_k} = \frac{h^j_i}{h^j} = \frac{\partial}{\partial u_i} \mathrm{Log}\, h^j(u_1, u_2 \dots\dots u_n) \qquad (2.24)$$

et

$$\varphi \equiv \sum_j \mathrm{Log}\, h^j(u_1, u_2 \dots\dots u_n) = \mathrm{Log}\, h^1 h^2 \dots h^n \qquad (2.25)$$

INTERPRETATION GÉOMÉTRIQUE

$u_i = \frac{p_i}{r}$ est l'inverse de l'abscisse sur l'axe du bien i du point où le plan de budget coupe cet axe. Dire que $h(u_1, u_2 \dots\dots u_n) = C^{te}$ représente l'équation d'utilité et que h est homogène (peu importe d'ailleurs le degré que la fonction arbitraire ψ pourrait faire varier dans 2.22) revient à dire que si l'on a une surface d'indifférence et si l'on multiplie ses coordonnées tangentielles par une même quantité, on obtient encore une surface d'indifférence. Cette opération est évidemment une homothétie de centre l'origine. Nous pouvons donc caractériser très simplement la solution trouvée en disant qu'elle est constituée par N familles de surfaces d'indifférence homothétiques par rapport à l'origine pour chacun des individus (1).

(1) Nous retrouvons ainsi plus logiquement une solution que nous avions déjà trouvée, mais comme sous-produit d'une question relative à des nombres indices. Cf "Remarques et Suggestions relatives aux nombres indices" par André Nataf et René Roy. Econometrica Vol.16 N°4 - Octobre 1948, pp. 337, 338 et pp. 342, 343.

EXTENSION DE CETTE SOLUTION

Mais la notion de barycentre étant absolument indépendante du système de coordonnées employé on voit que l'on obtiendra une nuple infinité de solutions de notre problème en considérant N familles de surfaces d'indifférence homothétiques par rapport à un point fixe arbitraire. Il conviendra de prendre des précautions dans tous les cas pour que les formes obtenues soient bien celles de surfaces d'indifférence et se limiter, le cas échéant aux parties positives des coordonnées. Mais en pratique il suffit que ces dernières conditions soient vérifiées dans le domaine où l'on suit les variations de la consommation.

II. 2.2. 2°) Une autre solution apparente est celle pour laquelle chacun des termes (2.26) $\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k^j$ est égal à $\lambda (u_1, u_2 \ldots u_n)$. On aura évidemment alors $\varphi = \sum \varphi^j$ (2.27) (II. 2.2.1° correspondait d'ailleurs au cas $\lambda = 1$ mais nous avons distingué ce cas car nous ne l'avons pas traité comme nous allons maintenant procéder).

Déterminons les formes des φ^j astreintes ainsi à (2.26). Il sera plus commode de partir d'une fonction, φ^1 par exemple, arbitraire, à laquelle (2.26) fera correspondre λ par définition. Si nous étudions alors les différences $\varphi^j - \varphi^1 = V^j$ on voit que ces différences vérifient l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k V_k^j = 0 \qquad (2.28)$$

analogue à (2.20) et dont la solution générale est

$$(2.29) \qquad V^j = v^j (u_1, u_2 \ldots u_n)$$

v^j étant une fonction homogène de degré zéro de $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Ceci montre que $$\varphi^j = \varphi^1 + v^j (u_1, u_2 \ldots u_n) \qquad (2.30)$$

Par suite $$q_i^j = \frac{\varphi_i^j + v_i^j}{\sum_k u_k \varphi_k^1} = q_i^1 + \frac{v_i^j}{\sum_k u_k \varphi_k^1} \qquad (2.31)$$

(2.31) montre, en faisant varier j, que les différences $q_i^j - q_i^1$ du fait de l'homogénéité de degré - 1 des v_i^j sont proportionnelles entre elles pour des u_i proportionnels entre eux. Géométriquement cela signifie que si l'on déplace un plan de budget parallèlement à lui-même la configuration des points de contact ou complexes de consommation dessine un polygone qui reste semblable à lui-même et dont les côtés homologues sont parallèles entre eux. Comme dans II 2.2.1°) tous ces polygones sont donc homothétiques entre eux, mais cette fois-ci le centre n'est pas fixe. La généralisation de II 2.2.1°) apparaît ici de façon très claire. Nous la retrouverons encore plus nettement maintenant en recherchant une façon de se donner géométriquement les solutions du type II, 2.2. 2°). Nous pouvons à cet effet nous donner φ^1 arbitrairement. Ceci reviendra à nous donner une famille arbitraire Σ^1 de surfaces d'indifférence, chacune d'elles munie d'un indice d'utilité défini à une fonction monotone près. La donnée arbitraire de v^j pourra correspondre géométriquement à la donnée arbitraire d'une surface Σ_o^j d'indifférence pour chaque individu, j, surface à laquelle nous affecterons une utilité arbitraire C_o^j. Ceci nous détermine en effet la fonction v^j $(u_1, u_2 \ldots u_n)$ car, à un plan de budget, de direction donnée arbitraire, tangent à Σ_o^j il correspond une valeur φ^j égale à C_o^j mais aussi à $C^1 + v^j$, C^1 étant l'indice de la surface Σ^1 à laquelle le plan donné est tangent et v^j étant la différence $C_o^j - C^1$. La fonction v^j est alors déter-

minée sur Σ_o^j et comme elle est constante pour des valeurs de $u_1, u_2 .... u_n$ proportionnelles entre elles, elle est par suite définie partout, Σ_o^j étant supposée admettre toujours un plan tangent de direction donnée, correspondant à un système de prix proportionnels.

Sous cette forme nous avons pu dégager l'influence de l'origine qui apparaissait dans II, 2, 2, 1°). Pour bien le voir nous allons retrouver II. 2.2. 1° qui est un cas particulier de II, 2.2. 2°). Nous partirons d'une famille Σ^1 formée de surfaces homothétiques par rapport à un point arbitraire ω. Prenons comme indice des Σ^1 le logarithme du rapport d'homothétie par rapport à une surface fixe de la famille. La variation de φ^j lorsqu'on passera d'un plan de budget tangent à Σ^j à un plan homothétique par rapport à ω dans un rapport fixe sera également le logarithme de ce rapport car ces plans sont tangents à deux Σ qui sont entre elles dans un rapport d'homothétie égal au rapport de l'homothétie de centre ω faisant passer du 1er plan tangent au 2ème. Cette variation de φ^j étant constante c'est dire que le 2e plan tangent enveloppe une Σ^j évidemment homothétique de Σ_o^j par rapport à ω.

Le même procédé nous montre que si Σ_o^j est confondue avec une Σ^1, v^j est identiquement nulle et les deux familles de surfaces d'indifférence sont confondues, quelle que soit la forme de l'indice d'utilité des Σ^1.

Ce procédé nous permet aussi de retrouver les solutions du 1er Chapitre correspondant aux cas d'agrégation toujours possibles. Cette solution correspond au choix suivant des données initiales. Prenons pour Σ^1 une famille définie en I, 2 · 4 à partir des surfaces S_1 et S_2 auxquelles nous affectons les indices respectifs 1 et 2. Les autres surfaces S_k de Σ^1, d'après leur construction, admettront comme indice l'abscisse du point M_k où elles coupent la droite M_1, M_2, M_1 et M_2 étant sur S_1 et S_2 des points homologues, M_1 ayant pour abscisse 1 et le segment $M_1 M_2$ étant pris pour unité (variable chaque fois). Ce choix d'indice est cohérent. Si l'on se donne alors Σ_o^j et que l'on détermine une autre Σ^j il faudra que les longueurs découpées par 2 plans parallèles, de direction Π tangents à Σ_o^j et Σ^j en M_o^j et M^j sur la droite $M_1 M_2$ de Σ^1 conjuguée à Π soient constantes, ce qui fixe à chaque fois la position du plan tangent à Σ^j lorsqu'on se donne le plan de même direction tangent à Σ_o^j. Mais cette position est justement la même que celle donnée par la construction ponctuelle des Σ^j à partir de Σ_o^j et des relations de conjuguaison plans Π et droites d'Engel. Il y a donc identité entre les deux générations.

II. 2.2.3° CONCLUSIONS

L'étude de II. 2.2.2°) nous a permis de retrouver synthétiquement toutes les solutions déjà rencontrées et en suggère beaucoup d'autres encore que nous n'avons sans doute trouvé qu'une petite partie des solutions possibles.

Que nous apprennent en tous cas les résultats déjà obtenus ? Le fait que nous puissions obtenir comme famille de surfaces agrégats n'importe quelle famille ainsi qu'il est aisé de le voir (en remplaçant par exemple φ^1 par φ dans les derniers calculs et en prenant $\sum_j v^j = o$ ce qui est possible) nous interdit de déduire quoi que ce soit sur la forme des surfaces agrégats lors même qu'elles existeraient. Cependant si l'on ajoute d'autres hypothèses on peut avancer un peu plus. En particulier dans le cas d'homothétie, II 2.2.1°) nous connaissons un facteur intégrant, l'unité.

C'est donc dire que $\sum_i \frac{\varphi_i}{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k} du_i$ est une différentielle totale exacte. Or, cette expression est égale à

$$\sum_i q_i \, d\left(\frac{p_i}{r}\right)$$

et l'on peut calculer approximativement son intégrale sur un trajet si l'on a des relevés suffisamment voisins des prix, quantités globales et revenus. Mais par ailleurs si l'on calcule l'intégrale $\int \sum_i q_i \, du_i$ sur un rayon issu de l'origine limité aux points où il coupe les 2 surfaces d'indifférence agrégat initiale et finale ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale, on doit calculer une expression de la forme $\sum_i \int u_i q_i \frac{du_i}{u_i}$ et comme $\frac{du_i}{u_i}$ est constant par rapport aux i sur un tel rayon et que $\sum u_i q_i = 1$ l'intégrale vaut $\int \frac{du_i}{u_i} = \left[L \, u_i \right]$ sur le rayon.

= l'opposé du logarithme du rapport de l'homothétie de centre l'origine permettant de passer de la surface initiale à la surface finale. Nous retrouvons dans l'esprit de notre étude un résultat que dans notre article déjà cité écrit avec M. Roy, nous avions déduit d'une formule dûe à M. Roy. Nous continuerons alors comme dans cet article (page 341). L'importance de ce résultat c'est qu'il permet le calcul du rapport d'homothétie. Si donc on effectue ce calcul en se plaçant dans cette hypothèse d'homothétie par rapport à l'origine, nous pourrons trouver un certain nombre de points M_i d'une <u>même</u> surface agrégat Σ_o, chaque point étant muni de son plan de budget Π_i. On pourra alors vérifier si l'on n'a pas adopté une hypothèse déraisonnable en recherchant si les points M_i peuvent se répartir sur une courbe C tangente en chaque point M_i au plan Π_i correspondant. Si par exemple Π_i fait un angle petit avec les segments Mi-1 Mi, et Mi Mi+1, et surtout si les points obtenus sont d'un côté opposé à l'origine par rapport à tous les plans de budget la vérification sera satisfaisante.

Moyennant une translation d'axes et les transformations correspondantes de coordonnées ce procédé est encore applicable si le centre d'homothétie essayé est un point autre que l'origine.

Dans le cas II 2.2.2° nous aurons à considérer la différentielle totale exacte $\lambda (u_i, u_2 .... u_n) \sum_{k=1}^{n} du_i \frac{\varphi_i}{\sum_k u_k \varphi_k} = \lambda \sum_{i=1}^{n} q_i \, du_i$. Si l'on connaît λ on pourra calculer (en général) approximativement $\int \lambda \sum_{i=1}^{n} q_i u_i \frac{du_i}{u_i}$ le long du trajet réel de l'économie. Mais en général on ne connaîtra pas d'autres liaisons entre les u_i et les q_i et on ne pourra pas calculer cette intégrale le long d'un autre chemin. On ne pourra calculer que $\sum \int \lambda \frac{du_i}{u_i}$ pour des u_i proportionnels et s'en servir non pour en déduire des points d'une même surface d'indifférence, mais seulement des plans tangents à cette surface. Si l'on était toutefois amené à considérer des courbes d'Engel données a priori pour une raison ou une autre on pourrait reprendre le calcul sur ces courbes et tester les hypothèses faites.

Tout en étant très prudent sur ces questions on voit qu'on peut avoir l'espoir de tester objectivement des hypothèses de prime abord subjectives sur la possibilité d'agrégation. Le test portera évidemment sur des propriétés très générales de la forme des surfaces d'indifférence, mais ne sera peut-être pas dénué d'intérêt.

II. 3 — L'AGRÉGATION DANS LA PRODUCTION. — CAS LINÉAIRE

Dans l'étude de la consommation les connaissances que nous possédons proviennent de statistiques globales de la consommation et de rares études sur les budgets de famille. Cette connaissance se traduit par la donnée de points isolés sur les surfaces d'indifférence individuelles ou sur les surfaces, disons, de consommation globale .

Si l'on reste dans le cadre de la théorie des choix, les propriétés d'ordre que doivent vérifier les points des surfaces d'indifférence, la façon dont se détermine la consommation à partir des surfaces d'indifférence et des plans de budget sont, qualitativement, les mêmes pour tous les individus. Dans ces conditions, étant donné les incertitudes qui règnent sur la forme des surfaces, mais aussi les propriétés communes qu'elles possèdent, il apparaît assez naturel d'essayer d'étendre au système macroéconomique les propriétés des surfaces d'indifférence microéconomiques. Comme nous venons de le voir à la fin de II 2.2.3°) avec certaines hypothèses on peut, au voisinage de points expérimentaux, essayer de prolonger la surface et de vérifier ensuite si les hypothèses semblent convenir.

Le domaine de la production ne se présente pas sous le même jour. Alors que l'expérience directe n'a donné jusqu'ici que peu de choses sur la connaissance des goûts, alors que bien souvent, du reste, une enquête directe risque de troubler le choix naturel de l'individu, l'expérience scientifique et technologique permet de connaître beaucoup de choses et avec une grande sûreté sur les fonctions de production. Par contre, ces fonctions sont très différentes entre elles selon la nature du bien produit. Les facteurs de production ne sont pas les mêmes pour des biens différents, alors qu'il y a beaucoup de biens de consommation communs à des individus très dissemblables. Les biens produits sont hétérogènes entre eux et on ne peut songer à les ajouter directement les uns aux autres.

La façon de poser le problème de l'agrégation dans la production et la direction d'études à suivre dépendent évidemment de ces caractères distinctifs.

Nous étudierons donc tout d'abord de près les formes analytiques qui semblent convenir le mieux à une fonction de production. Nous serons amenés, et pas seulement pour des raisons de simplification, à nous attacher au cas linéaire, terminologie actuellement adoptée et que nous définirons de façon plus précise au cours de l'exposé.

Les agrégats que nous constituerons seront soit des complexes à composantes homogènes de produits différents entre eux obtenus par des procédés techniquement distincts, soit des complexes hétérogènes définis en valeur. Dans le premier cas l'agrégat sera plus précisément l'ensemble des sommes de produits homogènes et de facteurs homogènes obtenus et utilisés par des procédés différents. Dans le deuxième cas l'agrégat sera l'ensemble des valeurs de différents produits ou facteurs groupés entre eux selon certains principes plus ou moins empiriques ou pratiques. Dans les deux cas nous étudierons les relations existant entre les différents agrégats. Nous trouverons des relations très directement dérivées des fonctions de production.

Après avoir établi théoriquement la forme de ces relations nous essayerons de les retrouver à partir des statistiques des agrégats introduits. Mais à ce moment ces relations d'ordre technique interfèrent avec des relations qui, elles, seront d'ordre économique. Ceci risquera de masquer certaines possibilités techniques. Cependant le seul fait d'avoir posé cor-

rectement le problème nous indiquera comment il faut rechercher et utiliser les relations techniques entre agrégats et les combiner éventuellement avec des relations économiques ou des objectifs d'ordre économique.

II. 3.1 - FONCTIONS DE PRODUCTION (1)

Comme nous l'avons dit il convient d'analyser les processus de production individuels avant de voir comment on peut agréger certains de ces processus dans une théorie économétrique.

Dans la plupart des études sur les fonctions de production jusqu'à une époque encore très proche on est parti de l'idée apparemment exacte qu'à un ensemble donné de quantités x_i de facteurs de production correspond une production maximum d'un bien A. Nous avons déjà vu que les exploitations téléphoniques étaient à peu près dans ce cas. Par ailleurs cette idée est certainement utile lorsqu'on considère une économie dans son ensemble. Il est bien certain par exemple que lorsqu'on considère à une époque donnée un pays et l'ensemble de ses ressources naturelles et humaines, et de son équipement, on peut concevoir que, dans une période ultérieure, on définisse, compte tenu de la structure socio-économique qui y règne, une production optimum. Il est également certain que lorsqu'un établissement industriel est équipé de façon à pouvoir mettre en œuvre plusieurs procédés de fabrication utilisant dans des proportions différentes les mêmes facteurs de production, et que ces facteurs sont en stock ou bien peuvent s'acquérir à des prix donnés, il existera pour cet établissement une répartition de l'utilisation des différents procédés assurant, à dépense donnée le bénéfice le plus élevé au cours du marché par exemple. En ce sens la donnée des facteurs définit la production optimum.

Dans ces deux exemples nous avons défini l'optimum de production d'un ensemble de biens par rapport à certains critères, vagues dans le premier cas, mais précis dans le deuxième. L'existence de ces critères et la multitude des biens à considérer faisaient que l'on disposait d'une variabilité permettant de pousser la production de certains biens plutôt que d'autres en répartissant au mieux les facteurs de production et en utilisant tous ces facteurs (au moins le semble-t-il).

Mais il n'en est plus ainsi, en général, lorsqu'on considère la production d'un bien A. Le critère de maximation semble ici bien évident. Il faut rendre A, quantité homogène, la plus grande possible étant donné l'existence de facteurs de production x_1, x_2 ..... x_n (nous supposerons toujours que nous raisonnons dans le cas d'un équipement donné). On conçoit, et formellement il n'y a rien à redire, que l'on puisse trouver une fonction

$$A = A(x_1,\ x_2 \dots\dots x_n) \qquad (1)$$

donnant cette valeur maximum de A.

Mais alors que la forme de la fonction (1) est à étudier de près on se laisse emporter par des habitudes dites de mathématiques, et on attribue à la fonction A $(x_1,\ x_2, \dots\dots x_n)$ des propriétés de continuité, dérivabilité, inversion par rapport aux variables qui en sont les arguments. Le danger d'un tel entraînement est manifeste : le plus grave en particulier est de considérer que (1) représente une surface à n dimensions ordinaire. Or, il suffit de songer aux exemples pratiques les plus courants pour voir qu'il n'en est rien. Pour fabriquer de l'acide chlorhydrique par exemple, il fau-

(1) Ce paragraphe reprend pour l'essentiel des idées que nous avons déjà exposées dans une communication au Congrès de la Sté Européenne d'Econométrie à Varèse en 1950.

dra des sources de chlore et d'hydrogène en proportions fixes et il sera impossible d'obtenir plus d'acide en augmentant la source de chlore sans toucher à celle d'hydrogène. Nous ne disposons donc que d'une variable, la quantité d'une source et non de deux car la proportion des sources est fixée. Ce caractère si évident a été pourtant longtemps négligé par les théoriciens. Cependant dès que l'on essaye d'utiliser vraiment, dans la pratique, statistiques en mains, la notion de fonction de production, on s'aperçoit qu'il faut analyser autrement cette notion. A notre connaissance c'est notamment avec les travaux de Léontieff qu'il est apparu qu'il y a non pas une seule relation fonctionnelle distincte entre les x_i et A, mais plusieurs. Par ailleurs la forme analytique de ces relations et la nature même des facteurs de production matériels x_i qui y figurent changent du tout au tout lorsqu'on considère plusieurs procédés de fabrication d'un même bien, ou d'un ensemble de produits associés (1). Ces faits étaient sans doute connus en gros. Malheureusement poussés par l'apparente facilité qu'introduirait la considération d'une seule fonction de production, en particulier dans les théories marginalistes, on est resté longtemps sans réfléchir sur ce point. Nous allons au contraire analyser de plus près les processus de production et voir comment peuvent se traduire analytiquement les différentes opérations matérielles.

Considérons un bien matériel A et intéressons-nous aux différents procédés possibles de fabrication de A. Nous ne pouvons d'ailleurs glisser sans explication sur l'expression : différents procédés possibles de fabrication. On pourrait, en effet, soutenir non sans raison qu'il y a en réalité pour tout produit une variété sinon infinie, tout au moins considérable de procédés de fabrication. L'histoire des transformations des techniques fournit un grand nombre d'exemples de l'énorme variété des procédés possibles. C'est ainsi que la fabrication de l'acier a reposé pendant longtemps sur le traitement du minerai de fer par le charbon de bois jusqu'au jour où on a pu mettre au point un procédé n'utilisant que le charbon ordinaire.

Puis la possibilité de traiter des fers phosphoreux a vu le jour. Des procédés électriques sont également employés. Pour chacun de ces procédés l'appareillage utilisé peut varier de façon continue. Les hauts fourneaux employés sont évidemment susceptibles d'avoir des dimensions très différentes d'un projet à un autre et, sans que nous insistions ici sur ce point, ce sont des raisons économiques qui dictent le choix de la dimension adoptée.

Mais, si les dimensions d'un haut fourneau sont variables, il est certain que les dimensions des cornues Bessemer ou des fours Martin qui lui sont associés en dépendent grandement, de façon qu'à un débit de fonte donné puisse correspondre un débit équilibré d'acier. Les différents appareils utilisés, les différents débits de matières premières seront en équilibre variant assez peu pour un établissement donné autour de certaines moyennes pour que, dès que l'on parle d'une technique on sache à peu près, pour une taille donnée, quelles sont les dimensions de l'équipement.

Ceci posé si l'on fait abstraction des tailles d'une même technique, et si l'on compare des techniques différentes de préparation d'un même bien on leur trouve évidemment des principes essentiels communs. Par exemple pour produire de l'acier il faut, d'une façon ou d'une autre, éliminer de la fonte le carbone et les silicates ou phosphates qu'elle renferme. Pour produire de l'acide chlorhydrique il faut combiner du chlore et de l'hydrogène

(1) Nous rappelons qu'on doit entendre par produits associés des produits apparaissant simultanément dans une préparation: par exemple, la distillation du charbon fait apparaître du coke, des goudrons, des benzols, etc....

en proportions invariables. Pour produire de l'électricité beaucoup de procédés déplacent des masses métalliques dans le champ d'un aimant. Sur ces exemples nous avons essayé de mettre en évidence le principe scientifique profond qui est utilisé.

Mais, en opposition à l'unicité du principe utilisé pour produire un bien, la réalisation technique peut varier considérablement. La production d'acide chlorhydrique s'obtiendra à partir du sel marin en dissolution aqueuse par électrolyse ou bien par combustion directe de chlore et d'hydrogène. Le déplacement de masses métalliques dans le champ d'un aimant s'obtiendra sous l'action de la vapeur produite à partir de l'eau par une combustion de houille ou par le dégagement de chaleur dû à des réactions atomiques ou bien sous l'action d'un moteur à explosion ou celle des gaz de récupération de hauts fourneaux, ou bien par la force éolienne ou marémotrice. Ce sont des considérations économiques, propres à une époque donnée, à une localisation géographique et à une population données qui feront pencher pour tel ou tel procédé.

On voit donc que les différents procédés d'obtention d'un même bien diffèrent physiquement de façon tout à fait discontinue. On ne peut passer de l'un à l'autre par des variations continues. Mathématiquement nous aurons donc besoin de représentations nettement différenciées, en variation discrète, pour les traduire. Ces représentations exprimeront des assemblages de machines, de gestes, de matières premières, produits semi-ouvrés ou finis en proportions distinctes pour ces divers procédés, alors même que le résultat, le produit final serait le même.

Cependant il nous faut aussi noter que malgré l'énorme variété des productions d'une industrie moderne, les équipements, les moyens de travail, sont des combinaisons diverses d'un nombre de gestes, d'appareils élémentaires, de procédés de base relativement petit en regard des combinaisons multiples auxquelles ils donnent lieu. Ce dernier caractère explique par exemple que le travail humain direct, n'utilisant que très peu d'outils, mais par ailleurs très souple, et beaucoup plus varié dans ses possibilités immédiates que le travail stéréotypé des machines, que ce travail humain, disons-nous, puisse être remplacé justement par des machines combinant des mouvements simples. Le fait de retrouver dans les équipements d'industries les plus diverses des combinaisons simples de machines élémentaires, permet d'espérer qu'on puisse exprimer des équipements compliqués par un nombre relativement petit de paramètres de base, les machines élémentaires.

Toutefois, pour les équipements il sera sans doute impossible de mettre en évidence directement comment interviennent ces paramètres de base dans les agrégats que nous constituerons. Seulement nous pouvons nous attendre à trouver une certaine agrégation, en quelque sorte cachée, se superposant à celle dont nous aurons eu initialement conscience et qui facilitera l'obtention de relations entre agrégats.

Par contre on peut facilement analyser de près, à la lumière des idées que nous venons d'indiquer, certaines des conditions techniques de la production. Nous remarquerons que dans la pratique il y a des relations nombreuses et souvent simples entre les quantités des différents facteurs de production utilisés. Cela apparaît bien dans les industries chimiques où il faut combiner dans des proportions à peu près fixes les corps naturels qui, directement ou indirectement, fourniront les produits chimiquement purs. De même la production d'objets identiques d'une série donnée de fabrication nécessite des approvisionnements en quantités bien proportionnelles. On voit donc que, pour <u>un grand nombre de facteurs de production, leur</u>

quantité sera proportionnelle à la quantité produite du bien A. De façon plus précise ceci sera vrai surtout pour les corps qui entrent effectivement dans l'objet terminé. Par exemple la quantité de gomme utilisée par une usine de pneumatiques sera proportionnelle au nombre de pneus fabriqués. (Il n'y a évidemment pas qu'un seul type de pneus fabriqués par l'usine. Aussi convient-il de remplacer cette proportionnalité au nombre total par une pondération relative aux différents types de pneus sortis. Néanmoins nous nous ramenons ainsi toujours à des proportionnalités simples à la base). On peut objecter qu'il y a des pertes et déchets de matières qui pourront même être importantes et surtout varier beaucoup d'un établissement à un autre. Contentons-nous de noter pour l'instant que ce sont là certaines origines d'éléments stochastiques qui se superposent à des éléments certains dont il convient d'établir au préalable la théorie, réservant l'incertain pour un stade ultérieur.

Pour d'autres facteurs de production, tels que les produits d'entretien, de chauffage ou d'éclairage des locaux, on ne peut parler d'une telle proportionnalité à la quantité des produits finals obtenus. Le chauffage dépendra de la durée et de la rigueur plus ou moins grande du froid, l'éclairage dépendra de l'époque, de l'exposition au soleil des différents ateliers, etc.

Peut-être pourra-t-on dégager des facteurs tels que les conditions atmosphériques, géographiques, etc.... difficiles à préciser directement, mais dont l'existence permet d'expliquer pourquoi certaines dépenses de caractère aléatoire sont fortement liées dans leurs variations.

Cette analyse, pour brève qu'elle soit, nous indique cependant un procédé de détermination des fonctions de production d'une entreprise. Ce procédé consiste à établir d'abord une description des différents stades de la production aboutissant au produit final. On décompose ainsi ce produit suivant ces différentes parties constituantes, celles-ci ayant été soit achetées telles quelles et assemblées dans l'entreprise, soit élaborées de façon plus complexe à l'intérieur de l'entreprise. Ceci permet de mettre en évidence les relations de proportionnalité les plus simples entre le produit final et les facteurs de production entrant, et d'essayer d'établir numériquement les coefficients de ces relations.

Puis on s'attaquera à des relations plus délicates telles que : usure des machines, entretien et à des relations beaucoup plus lâches telles que chauffage, éclairage.

L'étude des équipements, en particulier des équipements neufs, ne peut se faire de la même façon. Ces équipements ne se retrouvent pas incorporés matériellement dans les objets produits et il ne peut être question de proportionnalité physique entre eux et les produits. Bien que l'on puisse concevoir l'usure d'un équipement en fonction de l'importance de la production à laquelle il a servi, il est rare que l'on puisse se servir de cette notion pour évaluer les besoins en équipements. Le renouvellement des équipements se traduit en effet souvent non par un simple remplacement, mais par une modernisation qui empêche toute prévision d'ordre matériel. Aussi n'étudierons-nous pas la nature des relations entre produit et équipement.

Ce point écarté nous noterons que nous nous sommes attachés jusqu'ici à suivre les transformations matérielles des objets qui aboutiront à la production finale. Il faut nous arrêter sur l'intervention de l'homme dans ce processus. Il n'y a production, au sens économique du terme, que si l'homme intervient directement dans l'obtention des produits au moyen de son travail, que ce travail soit manuel ou cérébral d'ailleurs. Toutefois

ce travail ne reste pas attaché directement à la production finale. Il n'est pas susceptible, au moins jusqu'ici, d'une mesure directe indépendamment du produit auquel il se rapporte alors qu'on peut mesurer les masses de cuivre, d'acier, les quantités d'énergie électrique ou autre, directement ou indirectement utilisées dans la fabrication d'objets très divers. Par ailleurs si, à technique égale, les mêmes gestes doivent être répétés proportionnellement au nombre des objets produits, la cadence de travail peut varier. Aussi alors que des renseignements sur les quantités de matières premières absorbées par une industrie ont un caractère précis, les renseignements sur le nombre d'ouvriers ou d'employés et cadres utilisés par une entreprise ne suffisent pas à éclairer l'économiste sur les besoins en main-d'œuvre. L'intensité du travail fourni doit être mise en évidence et les différences de variations entre l'intensité du travail et les salaires expliqueront souvent les variations de l'économie. Il faudra donc porter une attention particulière à la signification des statistiques des salaires et des effectifs employés.

Nous allons maintenant appliquer les résultats de cette analyse à certains aspects de l'agrégation de la production. Comme nous l'avons expliqué ce que nous allons dire s'appliquera surtout aux flux courants de l'exploitation d'une entreprise : matières premières, produits semi-ouvrés, et finis, utilisés et fournis; à un degré moindre cela intéressera des consommations d'énergie sous diverses formes. Enfin, cela ne semble pas s'appliquer aisément aux problèmes d'équipements.

Les analyses des fonctions de production ont montré l'importance d'hypothèses de proportionnalité. Nous nous placerons dans ce cas qui, actuellement, est désigné dans la littérature économique par les termes de cas linéaire ou programme linéaire.

II. 3.2 - HYPOTHÈSE DU CAS LINÉAIRE (Grandeurs matérielles homogènes)

II.3.2.1 - DÉFINITION DU CAS LINÉAIRE POUR UN PROCÉDÉ DONNÉ T.

Comme nous l'avons vu la production d'un bien nécessite nombre de facteurs de production en quantités proportionnelles au bien produit. Dans le cas de biens associés très souvent les biens produits le sont en quantités proportionnelles à l'un d'entre eux.

Ces hypothèses se traduisent aisément dans le symbolisme mathématique (1) :

Nous supposons que tout procédé linéaire est caractérisé par la donnée quantitative d'un ensemble de ℓ facteurs que nous désignerons par

$$a, b, \ldots\ldots f$$

qui permettent de fabriquer s produits associés (2)

$$q, r, \ldots\ldots u$$

en quantités bien déterminées.

---

(1) Le symbolisme que nous employons, ou d'autres tout à fait analogues, se sont établis et développés au cours des études de programmes linéaires.

(2) Il pourra y avoir d'autres facteurs ou produits ne suivant pas ces lois. Ce que nous dirons ne leur sera donc pas applicable, mais cela n'enlèvera rien à la validité des conclusions que nous pourrons tirer pour les facteurs et produits vraiment linéaires.

Nous supposerons qu'il y a n procédés distincts Ti considérés $i = 1, 2, \ldots n$. Un procédé Ti est défini par le fait que les facteurs qu'il utilise et les produits qu'il fabrique sont proportionnels à un ensemble de quantités

$$a^i,\ b^i,\ \ldots\ f^i$$

$$q^i,\ r^i,\ \ldots\ u^i$$

non toutes nulles évidemment aux deux stades, mais non toutes forcément distinctes de zéro, ce qui permet de comparer des procédés, voir même des industries. très différents.

Nous désignerons par x_i le coefficient de proportionnalité. Ce sera donc en quelque sorte un degré d'utilisation de T .

II. 3.2.2 - DONNÉES GÉNÉRALES DE LA QUESTION

Nous allons d'abord supposer connues les techniques T_i c'est-à-dire les a^i, b^i, ... f^i, q^i, ... u^i. Mais si les x_i sont souvent connus à un niveau relativement bas, dès que l'on arrive à l'utilisation de statistiques globales à l'échelle d'un grand ensemble économique, d'une nation par exemple, on connait surtout les sommes

$$\Sigma\ x_i\ u^i = a \qquad \Sigma\ x_i\ b^i = b\ldots\ldots \qquad \Sigma\ x_i\ f^i = f$$

des quantités de facteurs utilisés et les quantités correspondantes

$$\Sigma\ x_i\ q^i = q \qquad \Sigma\ x_i\ r^i = r\ldots\ldots \qquad \Sigma\ x_i\ u^i = u$$

des produits obtenus.

Ce sont ces quantités a, b, ... f, q, r, ... u qui constituent les agrégats dont on peut disposer. L'étude de la production se ramène en définitive à connaître les x_i. Par ailleurs un objectif économique se traduit souvent par le désir de fixer aux produits finals q, r, ... u ou à certains d'entre eux une valeur donnée ou au moins égale à une valeur donnée pour satisfaire certains besoins. Les disponibilités existantes se traduisent souvent aussi par les valeurs que prennent les a, b, ...f et souvent par des inégalités que doivent vérifier les xi (ces inégalités sont dues par exemple au fait que l'on sait que le procédé T_i ne peut fonctionner au-dessus d'un certain degré ni souvent au-dessous d'un autre degré). Il nous apparait à ce moment que pour se fixer des objectifs réalisables il faut savoir quelles relations lient les a, b, ... q, ... u sur lesquels on raisonne en termes de besoins et possibilités immédiates. Et pour mener à bonne fin un programme, ayant fixé des valeurs compatibles de ces grandeurs, il nous faut calculer des x_i correspondants.

Il apparait bien que le premier problème est un problème typique d'agrégation. Quant au deuxième sa solution revient dans le fond à retrouver les paramètres x_i de structure de la production. C'est en ce sens un problème de base de l'agrégation au sens où nous l'avons posé en II.1 à 2° a) (page 30).

Et ces deux problèmes sont évidemment étroitement liés l'un à l'autre. Par ailleurs on conçoit, si l'on considère des procédés nombreux et très diversifiés que la matrice M des facteurs a^i et produits q^i contienne beaucoup de zéros, ce qui devra se traduire par la possibilité, une fois déterminés des systèmes cohérents de valeurs des facteurs a, b, ... f et pro-

duits q, r,... u que la détermination des x_i puisse être fractionnée et confiée à des groupes d' études G judicieusement constitués à partir de la nature de la matrice M.

Les études à faire semblent donc bien se tracer à nous :

1) Etude des relations de compatibilité entre les agrégats a, b,...q, ... u.

2) Détermination des groupes G.

Le deuxième problème demande une connaissance chiffrée des procédés. Nous ne pouvons songer à la faire ici.

Le premier problème peut se discuter formellement sans difficultés dans le cas linéaire. Nous arriverons à trouver les formes des relations entre les agrégats. En revanche le fait qu'il est difficile de connaître et d'exploiter surtout l'ensemble de la matrice M fait qu'en pratique la solution de ce premier problème sera moins complète qu'on ne peut l'espérer. Nous étudierons ces deux aspects de ce premier problème : 1° Nature des relations en II 3·2·3et 2° Recherche pratique de ces relations en II 3·2·5.

II. 3.2.3 - ÉTUDES DES RELATIONS DE COMPATIBILITÉ

Nous avons donc les équations

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a^i = a$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f^i = f$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i q^i = q \qquad (1)$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u^i = u$$

Si l'on suppose que les x_i peuvent varier indépendamment les seules relations entre les a, b, ... u sont, comme on le sait des relations linéaires et homogènes résultant de l'élimination des x_i entre les équations (1).

Supposons alors que m soit le rang du système (1) en x_i. Il est évident que l'on a

$$1 \leq m \leq n$$

et $$1 \leq m \leq \ell + s$$

Nous pouvons donc prendre m équations principales [1] dont nous désignerons par α, β ...... μ les valeurs des seconds membres. Ces valeurs étant prises arbitrairement les valeurs de chacun des agrégats restants, prises séparément en sont des fonctions linéaires et homogènes. Ces fonctions s'obtiendront en égalant à zéro la valeur du déterminant d'ordre m + 1 obtenu en bordant le déterminant principal Δ d'ordre m :

en colonne par les valeurs des m premiers seconds nombres et pour la (m + 1)ème ligne par les coefficients des inconnues principales et la valeur du second membre de l'équation non principale considérée.

(1) Evidemment si l'on dispose d'arbitraire dans ce choix mathématique, des considérations d'ordre économique pourront nous guider dans le choix.

Nous voyons que de la sorte nous obtenons $\ell + s - m$ relations linéaires et homogènes, le coefficient du 2ème membre non principal, qui est Δ, n'étant certainement pas nul. Nous appellerons (R) ces relations. On sait que dans l'hypothèse de variations indépendantes des x_i dans un voisinage aussi petit soit-il, il n'y a pas d'autres relations, linéaires ou non, entre agrégats.

II. 3.2.4 - DISCUSSION DES TYPES DE RELATIONS GÉNÉRALEMENT ADOPTÉS ENTRE LES AGRÉGATS

La seule nature reconnue des fonctions de production nous a donc déjà permis de dégager la forme des relations de structure entre les agrégats.

Or, le plus souvent, on ne connaît pas les relations T_i et l'on essaye a priori d'exprimer les agrégats a, b,...f, q,... u en fonction de l'un d'entre eux. Dans notre théorie ceci revient à donner à m la valeur un. Cette procédure est employée dans l'étude de secteurs économiques très importants pour lesquels les procédés, les facteurs et les produits sont nombreux (et sont d'ailleurs déjà agrégés). Il semblerait pourtant que m doive être bien supérieur à un. Cependant, s'il est très osé de dire que l'on obtient ainsi de bons résultats, ces résultats ne sont cependant pas ridicules, loin de là, et se montrent même très utiles pratiquement. Comment peut-on concilier ces faits généralement reconnus avec les conclusions de II. 3.2.c ?

C'est que ces conclusions reposent sur le fait que les x_i pourraient varier de façon indépendante. Or, l'intuition économique la plus simple montre clairement que ce n'est pas vrai : les degrés d'utilisation des T_i dépendent des conditions économiques et ne varient pas n'importe comment, sans liaisons les uns avec les autres. Donc au lieu d'avoir n x_i arbitraires nous en aurons normalement beaucoup moins. Nous pouvons donc penser qu'il est possible d'exprimer les agrégats en fonction d'un nombre d'entre eux plus petit que m. Si l'on y arrive (par un procédé ou un autre) en supposant qu'il n'y ait qu'un degré de liberté on aura des relations du type

$$\begin{array}{l} a = a(u) \\ b = b(u) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q = q(u) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t = t(u) \end{array} \qquad (2)$$

Les x_i seront donc liés par des relations du type

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} x_i a^i = a \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u^i \right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i t^i = t \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u^i \right) \end{array} \qquad (3)$$

La différence essentielle entre le type de relations (2) et les relations (R) est que le type (R) tenait identiquement par rapport aux x entre les a. Au contraire dans le type (2) non seulement les relations (R) tiennent mais il s'ajoute encore d'autres relations, que nous appellerons (R') qui indiquent des relations de comportement d'origine économique entre les x.

Dans une étude économétrique ces remarques peuvent s'utiliser de deux façons :

1° Il se peut que l'on se donne, par exemple à partir d'une théorie, les relations (R'). On les adjoint aux relations (R) et l'on recherche si les données statistiques permettent de tester l'exactitude de la théorie avancée.

2° Si l'on ne connaît pas, (ou presque pas), les relations (R') on cherche si les données ne vérifient pas, sans idées théoriques très poussées, des relations simples (par exemple linéaires ou polynômales autres que (R). Si l'on trouve effectivement des relations plus restrictives que (R) on peut penser qu'elles ont une origine économique et essayer d'en trouver l'explication. C'est bien souvent du reste par des procédés analogues que commencent des théories scientifiques.

Cette deuxième façon d'opérer nous amène à la question de la détermination des relations que nous appellerons (S) existant entre des séries de données. Cette étude est évidemment facilitée si on connaît les relations (R). Dans cet ordre d'idées, on peut signaler que dans un grand nombre de pays on essaye d'obtenir directement le plus de renseignements possibles d'ordre technologique et économique sur les procédés. Cependant ceci, d'une part, ne dispense pas de trouver toutes les relations (S) de forme donnée entre les agrégats de façon à en dégager en quelque sorte par différence les relations (R') car on ne sait jamais si l'on a tout rassemblé. D'autre part, le rassemblement de renseignements techniques et économiques est long et difficile et il serait déjà très utile de retrouver algébriquement les relations (S), en utilisant les données a, b, ... f, q, u.

II. 3.2.5 - DÉTERMINATION DES RELATIONS (S) DE FORME LINÉAIRE

Nous nous bornerons ici à rechercher les relations (S) qui sont linéaires et homogènes entre les a, ... u. Déjà en effet on doit pouvoir y retrouver si nos hypothèses sont exactes, les relations (R). De plus le procédé s'étend, dans la mesure où les calculs ne sont pas inextricables, aux relations polynômales (1).

On peut procéder systématiquement en recherchant si le rang du système n'est pas, dans l'ordre successif, 1, 2, 3...

On commence donc par choisir un agrégat (non nul ce que la nature économique de la question permet toujours) que nous supposerons être a (au besoin par changement de notation). On cherche à voir si les autres agrégats n'en sont pas fonction linéaire et homogène. En supposant qu'on dispose de relevés aux époques t_1, t_2 .... t_p (disposées en indices), cela nous conduit à vérifier que tous les déterminants du type Δ_2

$$\begin{vmatrix} a\,t_1 & \ell\,t_1 \\ a\,t_j & \ell\,t_j \end{vmatrix}$$

sont nuls pour j = 2, ... p et ℓ allant de b à u

Si ces déterminants ne sont pas tous nuls il est inutile d'essayer une autre variable à la place de a, car si tous les déterminants d'ordre 2 où

(1) Indiquons encore que selon la disposition des zéros de la matrice M un grand nombre de relations pourraient être recherchées dans les groupes G. Il resterait à établir certaines relations de liaisons d'ensemble. C'est d'ailleurs ainsi que procèdent les théories compréhensives, à partir de résultats plus ou moins partiels, et le travail pratique, vu sous cet angle, peut être réalisable.

figure une même lettre h comme élément de la 1ère ligne et de la 1ère colonne sont nuls, tous les éléments sont proportionnels, quel que soit j à ht_1 et ht_j et tous les déterminants d'ordre 2 étant formés de colonnes proportionnelles sont nuls. L'hypothèse d'après laquelle certains des premiers déterminants ne seraient pas nuls serait donc à rejeter et on tombe sur une contradiction.

Ceci établi, si tous les déterminants du type Δ_2 ne sont pas nuls, on note ceux qui le sont identiquement en t_j, car ces relations mises en évidence, bien qu'elles se retrouvent par la suite grâce au procédé que nous indiquons, ont l'avantage d'être simples. Puis on prend 2 variables a et b dont les déterminants Δ_2 ne sont pas identiquement nuls, a ayant ou non la même signification que tout à l'heure, et l'on regarde si tous les déterminants du type Δ_3

$$\begin{vmatrix} a\ t_1 & b\ t_1 & \ell\ t_1 \\ a\ t_2 & b\ t_2 & \ell\ t_2 \\ a\ t_j & b\ t_j & \ell\ t_j \end{vmatrix}$$

sont nuls pour $j = 3, 4, \ldots p$ et ℓ allant de c à u.

Si tous ces déterminants sont nuls le résultat est obtenu par développement par rapport à la dernière ligne (où t_j désigne alors un indice courant). S'il n'en est pas ainsi il est encore inutile de faire d'autres essais en faisant varier a, b et t_1 t_2 car si tous les déterminants d'ordre 3 dont 2 colonnes sont fixes sont nuls on peut exprimer toutes les lettres en fonction linéaire et homogène de deux d'entre elles seulement et par suite tout déterminant d'ordre 3 dont les colonnes sont ces lettres ne peut être que nul. Par suite il est impossible d'avoir une série de Δ_3 non tous nuls et une autre composée de déterminants nuls.

Si donc tous les déterminants d'ordre 3 ne sont pas nuls, on prendra l'un d'eux définissant 3 variables principales et l'on continuera le même procédé (en notant toujours les relations partielles qui ont pu se manifester).

En définitive, ou bien l'on arrivera à exprimer toutes les variables en fonction d'un nombre fixe d'entre elles, ou bien l'on n'y arrivera pas.

Dans le deuxième cas pourvu que le nombre de relevés distincts soit supérieur à $\ell + s$, étant donné que l'on est dans le cas linéaire, cela voudra dire qu'il y a plus de procédés linéairement distincts que de facteurs et produits (1). Techniquement donc les agrégats peuvent prendre toutes valeurs, il leur correspondra toujours des degrés d'utilisation dont il restera à voir qu'ils sont positifs et vérifient, le cas échéant d'autres relations d'inégalité.

ANALYSE DU 1er CAS

L'analyse du 1er cas est en quelque sorte l'analyse inverse du § II 3.2.c. Nous supposons ici que nous connaissons des relations linéaires et homogènes entre les agrégats. De la façon dont on les a recherchées on peut déduire que a, b,... f, q,... u se divisent en 2 groupes disjoints F et F' tels que toute variable r de F soit fonction linéaire et homogène à coefficients constants D_r des variables d de F'.

(1) ce qui n'est pas contradictoire naturellement avec le fait que les procédés ne soient pas "tous" distincts.

(4) $$r = \sum_{d \in F'} D_r \, d$$

alors que les $d \in F'$ peuvent varier, au moins d'après les statistiques disponibles, indépendamment entre elles.

(4) entraîne les relations

(5) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \, r^i = \sum_{d \in F'} D_r \left(\sum_i x_i \, d^i\right)$$

Sous la forme (4) les relations (R) risquent d'interférer avec les relations (R') de comportement économique liant les x_i.

Mais les relations (R) mises sous forme (5) sont des identités en x_i et par suite s'évanouissent. Si donc on connaît les procédés T_i de façon à pouvoir mettre (4) sous la forme (5) les relations (5) qui ne s'évanouissent pas ne peuvent être des relations techniques mais sont des relations de comportement. Plus exactement les relations (5) renferment certainement une partie provenant de relations de comportement.

Mais il faut remarquer que même sous la forme (4) si l'on connaît les relations (R) on peut mettre en évidence les relations de comportement (R'). Il suffit évidemment de remplacer dans (5) les valeurs de toutes les variables (tant dans F que dans F') au moyen de leur expression donnée par (R). Il ne reste plus, toutes réductions effectuées, que des relations entre variables principales du point de vue technique, donc relations distinctes des (R). On peut de nouveau pour ces relations étudier leur rang, etc....

Mais il est évident que les relations économiques existent en essence sous une forme structurelle qu'il n'y a pas de raison de retrouver par ce dernier procédé. Il sera donc difficile d'expliquer les résultats si l'on ne possède pas au moins une théorie, indiquant la forme par exemple des relations de comportement, et permettant de les identifier. Il n'est d'ailleurs pas sûr que ce soit toujours possible. Néanmoins le seul fait d'être mis en garde permet bien souvent d'utiles remarques.

Enfin, si l'on ne connait pas les relations (R) les relations (4) ne donnent que des renseignements dont on ne sait s'ils sont d'ordre technique ou économique ou les deux à la fois. On pourra utiliser ces renseignements si l'on suppose que l'économie ne varie que faiblement à tous les points de vue. Mais le danger de ne tabler que sur (4) est évident : d'une part on n'est pas préparé, même à équipement technique constant, pour prévoir des modifications dûes à des causes purement économiques; d'autre part, on ne peut apprécier à fond les moyens techniques dont on dispose, ni la façon dont jouent les forces économiques. Par conséquent, les recherches globales ont le plus grand intérêt à s'accompagner de recherches plus spécialisées, en particulier dans les secteurs en évolution.

II. 3.2.6 - INTRODUCTION D'ÉLÉMENTS STOCHASTIQUES

Ces résultats sont établis en supposant qu'aucune erreur de relevé n'existe sur les a, b,... u. Il est certain que pratiquement on ne peut tabler sur une telle hypothèse. Il faudra donc rechercher des estimations des coefficients des relations liant les a, b,.... u à partir d'hypothèses justifiables sur la distribution des aléatoires considérées. Nous nous trouvons là encore devant un problème de détermination de relations simultanées et

d'identification dont l'étude a été commencée par l'école de Koopmans(1). Ce problème mérite sans doute une longue étude que nous n'avons pas considérée comme il se doit. Mais il convenait au préalable de posséder une théorie débarrassée des phénomènes aléatoires.

II. 3.2.7 - DOMAINE D'UTILISATION DES RÉSULTATS

Tous ces résultats ont été établis pour des variables représentant des grandeurs physiques matérielles. A l'échelle d'un groupe d'industries de même nature on peut envisager de les appliquer, ce qui n'empêche nullement comme nous l'avons dit de prévoir encore leur fractionnement. Mais dès que la diversité des facteurs et produits augmente, il devient de plus en plus difficile de tenir des comptabilités matières aussi détaillées. On doit alors former des agrégats plus larges entre lesquels la comptabilité d'ensemble se tient en valeur. Dans ces conditions on ajoute non seulement des quantités de même nature, mais aussi des produits hétérogènes par l'intermédiaire de leurs valeurs.

Nous sommes donc amenés maintenant à étudier les relations pouvant lier des agrégats définis en valeur.

II. 3.3 - ÉTUDE DU CAS LINÉAIRE EN VALEUR

II. 3.3.1 - NATURE DES AGRÉGATS

Nous venons de montrer ci-dessus comment on est amené à grouper des quantités hétérogènes. Il importe de voir de plus près la nature des agrégats à considérer, selon les idées économiques généralement admises à l'heure actuelle.

Dans tout essai de classification, de mise en ordre de la production, on distingue naturellement les entreprises qui fabriquent des produits que notre activité journalière nous amène sans les identifier, à considérer comme voisins. Nous serons par exemple amenés à grouper ensemble les entreprises fabriquant de l'ameublement, ou bien des constructions mécaniques, ou bien les entreprises sidérurgiques, ou bien les entreprises alimentaires.

Chacun des secteurs ainsi considérés est caractérisé par le fait que ses produits sont, dans une large mesure spécifiques, en ce sens qu'il y a une corrélation étroite entre la nature des produits et secteurs considérés. Une salle à manger sera produite a priori par les industries de l'ameublement et non par les constructions mécaniques. Néanmoins des entreprises polyvalentes peuvent fabriquer accessoirement des objets auxquels on ne s'attendrait pas. Les entreprises sucrières du Nord sont par exemple de gros fabricants de papier. Les charbonnages fabriquent une quantité appréciable de courant électrique. Par ailleurs, les facteurs de production sont, en général, peu rattachés a priori à une industrie utilisatrice. Les constructions mécaniques aussi bien que les constructions électriques utiliseront par exemple de l'énergie sous forme de charbon, gaz, électricité, des métaux, des produits chimiques, de la main-d'œuvre. Les activités secon-

---

(1) Cf. la série d'articles publiés sous la direction de Koopmans dans: "Statistical Inference in Dynamic Economic Models" Monographie N°10 de la Cowles Commission Monographs chez John Wiley and sons New-York, et chez Chapman and Hall, Limited, Londres, 1950.

daires d'un secteur débordant sur les activités principales d'autres secteurs, il convient de définir des agrégats de facteurs et de biens produits (par terminologie anglo-saxonne : d'inputs et d'outputs) permettant de mieux décrire les besoins d'un secteur et le fruit de ses activités. Comme un facteur de production est lui-même un bien produit par un certain secteur, nous désignerons ces agrégats de facteurs et biens produits sous le nom commun d'agrégats de produits. Ces agrégats de produits sont évidemment en étroite correspondance avec les secteurs.

II. 3.3.2 - DESCRIPTION GLOBALE DE LA PRODUCTION

L'activité des établissements de production consistant à transformer des produits en d'autres produits, on peut décrire globalement la production en indiquant pour chaque secteur agrégat ses achats et ses ventes ventilés par agrégats de produits.

Nous désignerons par E_α, E_β, ... E_λ les différents secteurs agrégats et par U_1, U_2, ... U_y les différents agrégats de produits. Dans chaque secteur E_α nous mettrons en évidence les procédés employés (communs ou non aux différentes entreprises). Nous désignerons par $T_{1\alpha}$ $T_{2\alpha}$ .....$T_{n\alpha}$ ces procédés. Nous désignerons par $a^{i\alpha}{}_y$ la quantité de facteur a qui se trouve dans l'agrégat U_y et qui est utilisée par le procédé Ti fonctionnant avec le degré d'utilisation unitaire et par $q_v^{i\alpha}$ la quantité du produit q qui se trouve dans l'agrégat U_v et qui est utilisée par le procédé $T_{i\alpha}$ fonctionnant avec le degré d'utilisation unitaire et par $q_v^{i\alpha}$ la quantité du produit q qui se trouve dans l'agrégat U_v et qui est fabriquée par le procédé $T_{i\alpha}$ fonctionnant avec le degré d'utilisation unitaire.

Ceci posé nous supposons pouvoir connaître pour chaque E_α les sommes de ces achats et ventes aux agrégats de produits (en supposant que toute quantité fabriquée soit comptabilisée au prix du marché, même si elle n'est pas vendue). Désignons par p_j le prix unitaire du produit j.

Nous aurons donc pour chaque E_α des équations du type

(3.1)
$$\sum_{i\alpha \varepsilon E\alpha} x_{i\alpha} \Big(\sum_{a \varepsilon u_1} a^{i\alpha} p_a \Big) = A_{\alpha 1}$$
$$\sum_{i\alpha \varepsilon Eu} x_{i\alpha} \Big(\sum_{a \varepsilon u_2} a^{i\alpha} p_a \Big) = A_{\alpha 2}$$
....

Et de même pour les biens produits

(3.2)
$$\sum_{i\alpha \varepsilon E\alpha} x_{i\alpha} \sum_{q \varepsilon u_1} q^{i\alpha} p_q = V_{\alpha 1}$$
....
$$\sum_{i\alpha \varepsilon E\alpha} x_{i\alpha} \sum_{q \varepsilon u_y} q^{i\alpha} p_q = V_{\alpha y}$$

$A_{\alpha 1}$ et $V_{\alpha 1}$ désignant les valeurs globales des achats et ventes du secteur E_α aux produits U_1 .

Ces équations peuvent encore s'écrire, pour tous les E_α

(3.3)
$$\sum_{i\alpha \varepsilon E\alpha} x_{i\alpha} \times A_1^{i\alpha} = A \, \alpha \, 1$$

en désignant par $A_1^{i\alpha}$ les valeurs des achats au groupe de produits U_1 du procédé $i\alpha$ opérant au degré d'utilisation unitaire. On obtient des équations analogues pour les ventes

$$(3.4) \qquad \sum_{i\alpha \varepsilon E\alpha} x_{i\alpha} V_1^{i\alpha} = V\alpha 1$$

II. 3.3.3 - RELATIONS ENTRE LES AGRÉGATS DÉFINIS EN VALEUR

1ère Hypothèse : Constance des prix - Si l'on suppose les prix constants les coefficients des x_i dans les équations (3.3) et (3.4) sont des constantes. Pour trouver les relations entre les agrégats en valeur nous n'avons donc qu'à éliminer les $x_{i\alpha}$ en procédant comme dans II 3.2.c)

Nous chercherons donc sur (3.3) et (3.4) le rang du système. Si ce rang est inférieur au plus petit des deux nombres: nombre des procédés et nombre des équations, nous en déduirons un certain nombre de relations linéaires et homogènes entre les $A\, \alpha\, i$ et $V\, \beta\, j$. Nous appellerons ces relations (Rv).

Comme dans II.3.2. b) la connaissance de certains objectifs et de certaines disponibilités permet l'utilisation des relations (R v).

A vrai dire ceci se traduira surtout par la connaissance de bornes inférieures des $A\, \alpha\, 1$ et $V\, \alpha\, 1$. Pour fixer les idées le fait de vouloir obtenir une certaine quantité Q du produit q à partir du secteur $E\, \alpha$ nous donnera la valeur de $\sum_{1\alpha \varepsilon E\alpha} x_{1\alpha}\, q^{1\alpha} = Q \times p_q$ donc une borne inférieure de $V\, \alpha\, 1$ seulement, (tous les termes des 1er membres étant positifs). Cependant la juxtaposition de certaines exigences et certains renseignements peut être précieuse et peut permettre de fixer avec plus de sûreté qu'au simple jugé des valeurs minimum des seconds membres (1) de (3.1) (3.2) ou (3.3), (3.4). A partir de ces conditions imposées les relations (R v) permettent de fixer des valeurs compatibles pour les 2èmes membres non déterminés a priori. A partir de la connaissance des 2èmes membres on peut concevoir que les x_i puissent se calculer encore dans des groupes d'études G chacun plus spécialisé.

L'avantage de l'agrégation en valeur est évidemment qu'elle donne un groupement beaucoup plus complet et rapide que l'agrégation de grandeurs matérielles homogènes, et dans lequel il est loisible de développer davantage les termes que l'on juge intéressants.

CAS RÉELS : VARIATIONS DES PRIX

Mais les prix ne sont pas constants et leurs variations indiquent toujours des changements importants dans l'économie. Aussi convient-il de trouver les corrections à apporter aux données pour les ramener à prix constants. Un procédé applicable dans les économies fortement planifiées consiste à faire tenir une comptabilité à prix constants et obtenir ainsi des statistiques à prix constants sur lesquelles on pourra rechercher les relations (R v) et s'en servir comme nous venons de l'indiquer. Ce procédé convient tant que l'état de ia technique ne varie pas trop, en particulier qu'il n'y a pas apparition de nouveau procédé Ti. Il faut de temps à autre changer de système de prix de base pour adapter les (R v) aux conditions existantes.

(1) Il se peut par exemple que l'on sache que les produits $q^{1\alpha}\, p_q$ sont, pour chaque procédé, en proportion variant peu avec les termes restant de la somme $\Sigma_{q \varepsilon u_1}\ q^{i\alpha}\, p_q$. Un tel renseignement permettra évidemment d'améliorer la valeur à adopter pour les $V\, \alpha\, 1$ par exemple.

Si l'on ne peut appliquer ce procédé on emploie une approximation consistant à utiliser un certain nombre d'indices de prix que l'on applique aux divers agrégats, procédé assez commode et qui semble être souvent suffisant.

Notre façon de poser l'agrégation montre bien la signification que prennent les calculs à prix constants demandés souvent par pressentiment plus que pour des raisons bien précises.

RELATIONS (P) D'ORDRE ÉCONOMIQUE

Enfin dans le cas des agrégats en valeur comme dans le cas des agrégats homogènes, on peut se servir des valeurs courantes de ces agrégats pour étudier les relations qui existent entre eux et, utilisant les relations (R_v) essayer d'en dégager des relations (P) d'ordre économique. C'est d'ailleurs sous cette forme que s'introduisent le plus facilement les théories économiques. Il est en effet plus facile d'introduire en valeur des hypothèses sur la maximation du profit, la répartition des revenus entre les différents groupes socio-économiques, le montant de l'épargne, que de les introduire formellement sur des x_i. Il est bien certain que la connaissance des relations techniques (R_v) introduira seulement les obstacles matériels que rencontre l'économie tandis que les relations (P) sont des lois ou des objectifs proprement économiques. L'utilisation des calculs à prix constants, surtout si les relations (P) sont variables, donnera beaucoup de renseignements sur les relations (R_v). Mais ici encore, de même qu'à la fin de II 3.2.e on peut ne pas connaître les techniques $T_{i\alpha}$ et l'on court le danger de tomber sur des renseignements mixtes d'ordre à la fois technique et économique. Nous pouvons donc également conclure que les recherches globales doivent s'accompagner de recherches plus spécialisées, mais que le fait d'être prévenu contre les dangers que l'on court est déjà précieux par lui-même.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

C'est évidemment dans le contenu concret des résultats auxquels on peut arriver et dans leur interprétation économique la plus expressive possible que résidera l'intérêt de l'emploi des agrégats. Il importe donc maintenant de faire le point de ce travail, de voir comment il peut s'incorporer dans l'étude générale de l'économie et de délimiter au moins à grands traits les directions dans lesquelles il faut poursuivre nos efforts.

Nous avons dit, dans l'introduction, que le problème de l'agrégation se pose lorsqu'on essaye de passer d'un système économique complet à un système réduit plus maniable dont la résolution explicite puisse se concevoir. Cette résolution pourra permettre à elle seule des conclusions pratiques d'action, ou bien pourra constituer un stade préliminaire à une résolution du système complet plus poussée dans le détail.

Nous avons séparé dans notre étude à chaque fois, l'aspect production et l'aspect consommation.

Dans l'étude de la production, nous avons cherché à reconnaître les conditions de compatibilité technique qui doivent exister entre les agrégats physiques ou en valeur que l'on a considérés. Dans l'étude de la consommation, nous avons essayé de définir des comportements possibles simples, classiques, d'agrégats, tels que les groupes socio-économiques, que l'analyse économique considère comme importants.

Même si l'on se limite à une étude interne de ces deux grandes catégories, production et consommation, que faut-il encore faire ?

Il reste évidemment à expliciter par produits les lois de la consommation globale pour chaque groupe socio-économique reconnu en fonction du revenu. Il restera aussi, symétriquement, dans l'étude de la production à expliciter les relations existant entre les agrégats en distinguant le mieux possible entre les relations purement techniques et les relations de comportement économique.

Mais en supposant ces deux objectifs remplis, pour pouvoir expliquer l'évolution d'une économie, il faudra étudier les lois de la transformation de la production en consommation proprement dite et en objets ou produits permettant la poursuite et le développement de la production. C'est à ce moment qu'il convient d'utiliser les théories expliquant les comportements des agents économiques pour voir comment se créent et se répartissent les revenus.

De l'étude de ce point capital qui fait le pont entre la consommation et la production, nous pourrons déduire, grâce aux lois globales de consommation, les différentes classes possibles de répartition des biens finals de consommation et, grâce aux relations techniques de production entre agrégats, les différentes classes possibles de répartition de la production entre les différents procédés. La connaissance d'équations d'équilibre, suggérées par exemple par la théorie, ou d'objectifs demandés par un plan, permettra de déterminer les deux classes à considérer effectivement.

Il est évident que ceci souligne l'importance de la reconnaissance et de l'étude des groupes socio-économiques caractérisant les individus par le rôle non pas individuel mais d'ensemble qu'ils jouent dans la production où il est certain qu'intervient le rôle technique joué par l'individu et non sa personnalité.

Si l'étude de la consommation confirme qu'il est possible de décrire par un comportement global simple les résultantes des comportements d'individus de revenus voisins et de même rôle économique, ce qui est très vraisemblable, il apparaît que les agrégats qui se sont introduits et dont nous avons étudié certaines des relations qui existent entre eux, jouent un rôle très important dans l'étude de l'économie et justifient qu'on poursuive l'étude entreprise dans les directions indiquées.

NOTE ANNEXE SUR L'ÉLARGISSEMENT DE CERTAINES HYPOTHÈSES

Certaines questions posées pendant la soutenance de cette thèse nous ont amené à élargir les hypothèses utilisées au chapitre I dans l'étude du problème de Klein, sans cependant que nous ayons pu jusqu'ici démontrer tous les résultats en restreignant les hypothèses. Seuls certains résultats sont établis plus largement.

FORME DES RELATIONS $F_\alpha = 0$

Nous allons tout d'abord prouver, sans aucune hypothèse que les fonctions individuelles de production $F_\alpha = 0$ doivent nécessairement pouvoir se mettre sous la forme :

$$F_\alpha (G_\alpha, H_\alpha, I_\alpha) = 0$$

Pour le voir il suffit en effet de bloquer les valeurs des variables $x_{i\alpha}$, $n_{j\alpha}$, $z_{k\alpha}$ dans A - 1 fonctions de production $F_\alpha = 0$ ne faisant varier par exemple que celles relatives à la fonction $F_1 = 0$. $\Phi(X, N, Z) = 0$ doit, d'après les conditions du problème être identiquement vérifiée pour tous les ensembles de valeurs des x_{i1}, n_{j1}, z_{k1} qui vérifient $F_1 = 0$. Mais alors Φ est dans ces conditions une fonction des seules variables :

$$X = G(x_{11}, x_{21}, \ldots\ldots x_{m1}; \ldots\ldots; x_{1\alpha} \ldots\ldots x_{m\alpha}; \ldots\ldots; x_{1A} \ldots\ldots x_{mA})$$

où seuls les x_{i1} varient

et N où de même seuls les n_{j1} varient
et Z où de même seuls les z_{k1} varient

Donc la restriction ainsi opérée sur Φ n'est fonction que de certaines valeurs associées de fonctions que nous pouvons identifier à des fonctions

$$G_1 (x_{11}, \ldots\ldots, x_{m1})$$
$$H_1 (n_{11}, \ldots\ldots, n_{r1})$$
$$I_1 (z_{11}, \ldots\ldots, z_{s1})$$

On peut donc, dans tout le domaine de définition de la relation $F_1 = 0$ la mettre sous cette forme de cette restriction de Φ.

Donc $F_1 = 0$ peut s'écrire

$$F_1 (G_1, H_1, I_1) = 0$$

Le résultat est évidemment valable pour toutes les relations $F\alpha = 0$ quel que soit α.

PORTÉE DU RÉSULTAT

En réalité ce résultat n'apporte vraiment de simplification que si des hypothèses un peu moins larges sont faites d'une façon ou d'une autre.

Une manière de voir ce point est la suivante :

Supposons les valeurs des x, n, z de toutes sortes comprises entre 0 et 1 et données par leur développement décimal (par exemple) illimité. A tout système de valeur des x faisons correspondre la valeur en développement décimal illimité de X comprise entre 0 et 1 et ainsi définie :

la partie décimale de X s'obtiendra en écrivant dans l'ordre d'abord le 1° chiffre décimal de x_{11}, puis celui de x_{21} .... celui de x_{m1}, celui de x_{12} ; etc.... jusqu'à x_{mA}, puis en passant aux 2èmes chiffres des x, puis aux 3èmes, etc....

Ce procédé bien connu établit ainsi une correspondance biunivoque entre le segment 0, 1 de X et le volume des x (on sait d'ailleurs que l'on peut par des transformations simples passer à l'axe des X et à tout l'espace des x, mais ceci dans le fond importe assez peu).

Procédons de même pour N et Z.

Il est alors clair que nous avons défini des fonctions X, N, Z et que ces fonctions sont liées par une relation. En effet la connaissance des valeurs de X et N par exemple nous permet de remonter aux x et n. De chaque équation $F\alpha = 0$ nous pouvons alors déduire un certain nombre de valeurs des z et par suite des valeurs de Z (non uniques d'ailleurs, mais non indéterminées).

Formellement donc le problème de Klein est possible dans tous les cas mais on voit à quels monstres mathématiques (et encore plus économiques) l'on aboutit.

HYPOTHÈSES RÉGULATRICES

Il semble alors déjà raisonnable de supposer :

1° que les fonctions X, N, Z doivent être continues lorsque leurs arguments varient de façon continue dans un <u>volume</u> de leur espace,

2° que dans chaque relation $F\alpha = 0$ (α variable) et $\Phi(X, N, Z) = 0$ on puisse inverser par rapport à <u>n'importe quelle variable</u> dans le <u>volume</u> de variation des variables (pour éviter des bizarreries).

FORME de X, N, Z, lorsque les 2èmes hypothèses sont vérifiées

Dans ces conditions on peut démontrer que par exemple

$$X = G (G_1, G_2, \ldots\ldots G_A)$$

Pour cela il suffira de démontrer que X ne varie pas lorsqu'on donne aux x_{i1} deux systèmes de valeurs donnant à G_1 la même valeur, les va-

leurs des $x_{i\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \ldots$ A ne variant pas, et appliquer successivement le même raisonnement à G_2, G_3, ... G_A.

Ceci est alors évident car aux deux systèmes de valeurs des x_{i1} (dénotées x_{i1} et $\overline{x}_{i1}$) il correspond d'après l'équation F_1 $(G_1, H_1, I_1) = 0$ un même système de valeurs des n_{j1} et z_{k1} (tout au moins s'il en correspond un pour un seul des systèmes de valeurs des x_{i1}). Par conséquent N et Z ne varieront pas et la relation Φ (X, N, Z) = 0, d'après nos hypothèses leur fera correspondre une seule valeur de X au moins localement. Donc X ne varie pas lorsque les x_{i1} varient de façon que G_1 ne varie pas.

Le même raisonnement s'applique à G_α quel que soit α et à N et Z.

AFFAIBLISSEMENT DES HYPOTHÈSES

Nous avons été amenés naturellement à introduire des hypothèses plus restrictives, qui sont sans doute nécessaires si l'on se place à un point de vue économique. Cependant il peut sembler intéressant de montrer le résultat suivant :

"Si le problème de KLEIN est possible, on peut trouver des fonctions $\overline{X}$, $\overline{N}$, $\overline{Z}$ qui ne soient, respectivement fonction

$\overline{X}$	que de	$G_1, G_2, \ldots G_A$
$\overline{N}$		$H_1, H_2, \ldots H_A$
$\overline{Z}$		$I_1, I_2, \ldots I_A$

Nous avons en effet établi que, nécessairement F_α pouvait se ramener à la forme F_α $(G_\alpha, H_\alpha, I_\alpha) = 0$.

Considérons alors des fonctions convenables X, N, Z. Etant donnés par exemple 2 systèmes des $x_{i\alpha}$ donnant à $G_1, G_2, \ldots G_A$ même valeur il ne s'ensuit pas que X prenne la même valeur. Mais nous pourrons considérer un seul de ces systèmes de valeurs que nous adopterons et appellerons $\overline{X}$. D'une façon plus générale : Etant donné un point G défini par G_1, $G_2, \ldots G_A$ pouvant provenir de systèmes différents des x faisons correspondre à G un et un seul des systèmes $x_{i\alpha}$ dont il puisse provenir. Considérons la valeur X correspondant à ce système et appelons-là $\overline{X}$. A tous les systèmes $x_{i\alpha}$ donnant le même point G nous pourrons alors faire correspondre la même valeur $\overline{X}$. Nous définirons de même les $\overline{N}$, $\overline{Z}$ associés. Comme l'on avait Φ (X, N, Z) = 0, sans changer la relation Φ, en restreignant seulement peut-être son domaine de définition nous aurons bien $\Phi(\overline{X}, \overline{N}, \overline{Z}) = 0$, ce qui établit le théorème.

Nous n'avons pas établi, résultat encore ouvert, que X, N, Z n'étaient fonction dans le cas le plus général que des G, H et I respectivement. Toutefois ce résultat établit que pour étudier plus profondément la structure des relations $F_\alpha = 0$, on peut se limiter à la considération de fonctions X, N, Z de la forme $\overline{X}, \overline{N}, \overline{Z}$.

Composition - Impression
par les Procédés
" TYME - OFFSET "
ACHEVÉ D'IMPRIMER
LE 15 MAI 1954
SUR LES PRESSES DE
J. & R. SENNAC
54, Fbg Montmartre, 54
PARIS (9e)

N° d'Imprimeur : 4.924